
La relación riesgo- rendimiento y la valoración de activos

PID_00280034

Jorge Mario Uribe Gil

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas



**Jorge Mario Uribe Gil**

Jorge Mario Uribe es economista (Universidad del Valle) y profesional en Finanzas y Negocios Internacionales (Universidad Santiago de Cali). Máster de Economía de la Universidad de los Andes y máster de Investigación en Economía del Instituto Universitario Europeo (Florencia, Italia), es doctor en Economía por la Universidad de Barcelona.

Ha impartido docencia en el máster de Economía Aplicada y en el de Ingeniería de la Universidad del Valle, en el máster de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat Politècnica de Catalunya y de la Universidad de Barcelona, y en el máster universitario en Dirección Financiera de la Universitat Oberta de Catalunya, así como en el grado de Economía y en el de Administración y Dirección de Empresas de estas universidades.

Como investigador principal o como parte del equipo de investigación, ha participado en diferentes proyectos sobre la transmisión de la incertidumbre en los mercados financieros globales o sobre valoración de activos. Estos proyectos han sido financiados por diferentes entidades como la Fundación Mapfre, la Fundación BBVA, la Fundación Ramón Areces y el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Su investigación sobre finanzas se ha publicado en revistas como el *Journal of International Money and Finance*, *Energy Economics*, *International Review of Financial Analysis*, entre otros.

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: Jorge Mario Uribe Gil

Primera edición: marzo 2021

© de esta edición, Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC)

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Autoría: Jorge Mario Uribe Gil

Producción: FUOC

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea este eléctrico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita del titular de los derechos.

Pasados tres años desde la fecha de publicación de la primera edición de este material, se considerará publicado bajo licencia Creative Commons (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>).



Índice

Introducción.....	5
1. Antecedentes.....	7
2. Antecedentes del modelo de media-varianza.....	8
3. Modelo de media-varianza.....	10
3.1. Carteras compuestas únicamente por activos riesgosos	11
3.2. Carteras compuestas por activos riesgosos y un activo libre de riesgo	15
3.3. Elección de la cartera óptima en el modelo en media- varianza	16
4. El modelo CAPM.....	19
4.1. El CAPM empírico	24
5. Modelos multifactoriales y teoría de valoración de arbitraje	26
6. Caso de estudio.....	28
6.1. Mercado con tres títulos	28
6.1.1. Solución	29
6.2. Modelos de valoración de activos por factores	32

Introducción

En este módulo se estudiarán los principios de la valoración de activos. Se parte del modelo de utilidad esperada y su especificación en el modelo de media-varianza para la construcción de carteras óptimas. Se revisará, en este marco, la relación directa existente entre el riesgo de una inversión y su rendimiento, la cual es fundamental para determinar el valor de un activo financiero y, en general, el valor de cualquier inversión. A continuación, se estudiará una versión del modelo que supone equilibrio del mercado de títulos valores conocida como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), según la cual el riesgo de un activo se puede dividir entre riesgo diversificable (que puede ser eliminado mediante una correcta diversificación del portafolio de inversiones) y no diversificable o sistemático (que no puede ser eliminado), y que es el que verdaderamente determina el rendimiento de una inversión. Este riesgo sistemático afecta a todos los activos riesgosos en el mercado, aunque en diferente medida. La distinta sensibilidad ante el riesgo sistemático constituye la base teórica para explicar que existan distintos precios y rendimientos en el conjunto de activos financieros disponibles para la inversión financiera, en particular en el mercado de renta variable, que es el que se utiliza para ilustrar todos los conceptos en este módulo. Finalmente, se verán algunas predicciones y limitaciones del modelo CAPM, que llevan a ampliar el conjunto de factores de riesgo sistemático y, por ende, al planteamiento de los modelos de valoración de activos por factores basados en el principio de (no)arbitraje. El universo de factores dentro de los cuales se puede escoger en la literatura es enorme (existen cientos de factores en la actualidad), por lo que solo se mencionarán algunos de los más populares en la práctica.

1. Antecedentes

La valoración de activos es uno de los campos más estudiados de las finanzas modernas. La pregunta subyacente a este campo de estudio es, ¿cuál es la razón por la que el precio (rendimiento) de unos activos es superior al de otros? La respuesta en líneas generales es simple: los distintos activos en el mercado ofrecen compensación por distintos niveles de riesgo asumidos. A mayor riesgo, mayor rendimiento esperado de una inversión. Esta conclusión teórica parte de la base de que se trata a los inversores en el mercado como «adversos al riesgo», lo cual quiere decir que, si se da a escoger, como inversores, se preferirá una cantidad de dinero que se ofrezca con certeza, a la misma cantidad de dinero ofrecida en valor esperado (con probabilidad de ganar más o de ganar menos). La única razón por la que se podría estar dispuesto a incurrir en una inversión más riesgosa que otra es porque el rendimiento que se espera de tal inversión es mayor que el rendimiento esperado de la inversión con un menor nivel de riesgo. A esta relación entre riesgo y rendimiento se la suele vincular directamente con el principio de arbitraje, o ley del precio único, según la cual dos activos con el mismo nivel de riesgo deberán ofrecer el mismo rendimiento. De no ser así, las compras (del activo subvalorado) y las ventas (del activo sobrevalorado) por parte los «arbitrajistas» en el mercado llevarían a que los rendimientos relativos se igualasen.¹

⁽¹⁾Vale la pena mencionar también la literatura de los «límites del arbitraje», según la cual algunas restricciones del mercado en la vida real y algunos sesgos en la percepción de sus participantes pueden llevar a que dos activos con el mismo nivel de riesgo ofrezcan distintos rendimientos. La misma no se abordará en este módulo, cuya base será siempre la relación positiva entre rendimiento y riesgo, y el principio de arbitraje

A pesar de que el principio es muy sencillo, el principal reto de la valoración de activos es determinar cómo se puede medir el riesgo de sistema, por el cual los inversores exigen recibir una compensación. Se verá que, a medida que evoluciona y se refina la comprensión teórica del riesgo, aparecen nuevos modelos de valoración de activos. De este modo, se podría decir que los inversores buscan compensación por el riesgo de un activo encarnado en su volatilidad, por su exposición ante el riesgo del mercado como un todo, por el tipo de empresa en la que invierten (en crecimiento, o cuyo valor está en ascenso, etc.), por la liquidez de la inversión (cuán rápido y a qué coste se puede vender una determina cartera o activo), y muchos otros factores que han sido identificados previamente y sintetizados en los modelos que se estudiarán a continuación.

Para saber más:

La presentación en este módulo se ha hecho siguiendo notación homogénea con la literatura, de manera que, para saber más, podéis consular: *Economía financiera*, de José Marín y Gonzalo Rubio (2001), o *The Economics of Financial Markets*, de Roy E. Bailey (2005).

2. Antecedentes del modelo de media-varianza

En los modelos de microeconomía tradicional, se acostumbra a tratar el problema de un consumidor representativo como el de **maximizar una función de utilidad sujeta a una restricción presupuestaria**. Tal función de utilidad representa el nivel de satisfacción que el consumo de bienes y servicios reviste para una persona, mientras que la restricción refleja la naturaleza finita de los recursos de los que se dispone (incluido el tiempo). Esta es una forma sencilla de plantear el modo en el que óptimamente se comportarían las personas en el mercado si tienen unos recursos para gastar y quieren consumirlos de forma tal que sean lo más felices posible. Además de las limitaciones evidentes sobre lo que hace felices a los individuos, el cual, por supuesto es un tema complejo que difícilmente podría sintetizarse en una función, una de las principales limitaciones de este paradigma tradicional o clásico, como ya se discutió en el módulo «Conceptos fundamentales para la administración del riesgo financiero», es que no incorpora el riesgo en el proceso de toma de decisiones por parte de las personas.

Con el fin de incorporar esta importante dimensión del problema de estudio aparecen, en la década de los cuarenta, las funciones de utilidad esperada (UE), planteadas por parte de John von Neumann y Oskar Morgenstern, como un modo de derivar lo que sería (normativamente hablando) el comportamiento esperado de un consumidor que tuviera en cuenta la naturaleza aleatoria del consumo futuro. Las funciones de UE son muy similares a las funciones tradicionales, con la diferencia de que, para las primeras, la utilidad de las personas en función de los bienes que consumen no es un valor conocido, sino un valor esperado, que por tanto está sujeto a las leyes de la probabilidad que se han visto en otros módulos. Esto ocurre porque, tanto el ingreso como el consumo futuro de las personas, son variables aleatorias que dependen de ciertos «estados» positivos o negativos del mundo, de cuya existencia se está al tanto en todo momento, pero que no se conocen hasta que efectivamente ocurren. Una función de utilidad esperada en finanzas generalmente se expresa en relación con la riqueza del inversor, que se denota con R , de «riqueza». Se podría escribir como sigue:

$$UE = E(U(R)) = p_1 U(R_1) + p_2 U(R_2) + \dots + p_l U(R_l) \quad (1)$$

donde R_s , $s = 1, 2, \dots, l$ es el valor de la riqueza del inversionista en cada uno de los S posibles estados del mundo, de los cuales no se sabe con certeza cuál va a ser el que se observará, sino que solo se sabe que, con cierta probabilidad p_s , se observará el estado s . Notad que, de acuerdo con la notación del módulo «Conceptos fundamentales para la administración del riesgo financiero», si todos los estados son equiprobables ($U(R) = \sum_{s=1}^l \frac{U(R_s)}{l}$), se está sencilla-

mente ante el valor esperado (o media) de la función de utilidad, de ahí su nombre. En principio, esta función $U(R)$ podría tener muchas formas. Una de ellas, particularmente conveniente, es la función cuadrática; cuando se especifica tal función cuadrática es cuando se obtiene el modelo en media y varianza de gestión de carteras óptimas que se estudiará a continuación.

3. Modelo de media-varianza

Si se supone que la función de utilidad esperada del inversionista es cuadrática, en el sentido en el que esta solo depende del primer y el segundo momento de la distribución de probabilidad de la utilidad, así $U(R) = F(E(R), \text{var}(R))$, se obtiene el modelo en media-varianza. Este problema también se puede escribir de otra forma más intuitiva, si se recuerda que el primer momento de esta distribución es el rendimiento medio de la cartera p , $\mu_p = E(r_p)$, o en palabras, cuánto se espera ganar por la inversión, mientras que el segundo momento es el riesgo medido por la varianza, $\sigma_p^2 = [(r_p - \mu_p)^2]$.

A esta función se la llamará $F(\mu_p, \sigma_p^2)$ y se supondrá que es una función cuadrática, de forma tal que:

$$F(\mu_p, \sigma_p^2) = \mu_p - \theta \sigma_p^2 \quad (2)$$

donde θ expresa la actitud frente al riesgo del inversionista. Ya se ha dicho antes que se supone que los inversores en el mercado son adversos al riesgo, de acuerdo con lo cual θ siempre será positivo. Ya que de esta forma un incremento en la varianza de la cartera reducirá la utilidad del inversionista, debido al signo menos que precede el lado derecho de la ecuación (2). Cuán adverso al riesgo sea, dependerá del valor de θ . Naturalmente, cuanto mayor sea este parámetro, mayor será el grado de aversión al riesgo del inversor financiero.

Notad que en la ecuación (2) no se han usado probabilidades o el operador de valor esperado, pero esto es solo un truco. El hecho de que se estén incluyendo la media y la varianza, que son momentos de la distribución de probabilidad de los rendimientos de la cartera, implica que la función de utilidad $F(\mu_p, \sigma_p^2)$ es en efecto una función de utilidad esperada en toda regla, en la que se ha tenido en cuenta la incertidumbre de la inversión.

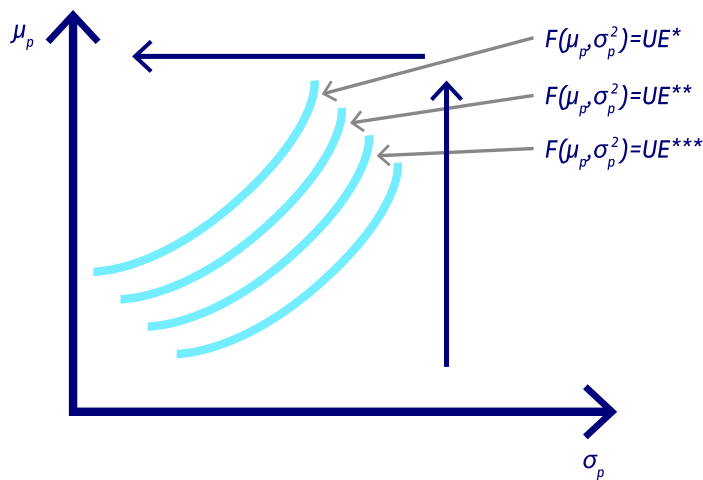
No obstante, vale la pena resaltar que esta función de utilidad, al ser cuadrática, solo considera los dos primeros momentos de la distribución de los rendimientos; otros momentos de mayor orden, como la asimetría o la curtosis, son ignorados. Este supuesto es consistente con el de suponer que la función de distribución de probabilidad de los rendimientos de la cartera es normal y, por ende, que está completamente descrita por sus dos primeros momentos.

Respecto al comportamiento de $F(\mu_p, \sigma_p^2)$ cuando cambian sus componentes, se tiene que la derivada parcial de la función con respecto a μ_p es positiva y con respecto a σ_p^2 es negativa. Es decir, la utilidad aumenta con el rendimiento esperado y disminuye con el riesgo de la cartera.

Un modo útil de pensar en la relación entre el riesgo y el rendimiento financiero es evaluar las *curvas de indiferencia* que describen la utilidad de un inversionista hipotético. Las curvas de indiferencia se definen como las *diferentes combinaciones entre rendimiento y riesgo que ofrecen al inversionista el mismo nivel de utilidad*. Las mismas son una representación gráfica de cuánto estaría dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento un inversor dado, de forma tal que su nivel de utilidad no se altere.

Tales curvas se pueden representar gráficamente como en la figura 1, cuando la función de utilidad del inversor financiero es cóncava, $F(\mu_p, \sigma_p^2)$; es decir, cuando se trata de un inversionista adverso al riesgo. En la figura 1 se han fijado distintos niveles de la utilidad esperada denominados UE^* , UE^{**} , UE^{***} , etc., con el fin de obtener distintas curvas de indiferencia.

Figura 1. Relación del rendimiento esperado y el riesgo de una cartera



Fuente: elaboración propia

3.1. Carteras compuestas únicamente por activos riesgosos

Para entender mejor el problema del inversor financiero, conviene pensar en una situación en la que solo existieran dos activos financieros en los que se pudiera invertir en el mercado, los activos A y B. En este caso, el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera, según lo visto en el módulo «Conceptos fundamentales para la administración del riesgo financiero», estaría dado por las siguientes ecuaciones:

$$\mu_p = W\mu_a + (1 - W)\mu_b \quad (3)$$

$$\sigma_p^2 = W^2\sigma_a^2 + (1-W)^2\sigma_b^2 + 2W(1-W)\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b \quad (4)$$

donde W es la proporción del dinero que se invierte en el activo A, que se trata naturalmente de un número entre 0 y 1; a mayor proporción invertida en ese activo, mayor W .

Luego, el interés está en analizar el riesgo y el rendimiento de la cartera en las ecuaciones (3) y (4). Para este fin, se analizarán varios casos extremos para luego derivar los casos intermedios. Primero, se considerará el caso en el que *los rendimientos de los dos activos financieros están perfectamente correlacionados*, es decir, cuando $\rho_{ab} = 1$. En este caso, la ecuación (4) se puede escribir como sigue:

$$\sigma_p^2 = W^2\sigma_a^2 + (1-W)^2\sigma_b^2 + 2W(1-W)\sigma_a\sigma_b \quad (5)$$

Si se toma la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, y teniendo en cuenta que la volatilidad (medida como la desviación estándar) debe ser positiva, se tendrá que:

$$\sigma_p = W\sigma_a + (1-W)\sigma_b \quad (6)$$

Notad que en este caso *no existen beneficios de diversificación* al repartir la inversión entre los dos activos A y B, ya que la correlación entre ellos es perfecta. Luego, el riesgo de la cartera σ_p es sencillamente la suma ponderada (de acuerdo con la participación de cada activo en la cartera) de los riesgos individuales σ_a , σ_b .

Si se analiza el caso de la *correlación negativa perfecta*, que corresponde a $\rho_{ab} = -1$, se tendrá que:

$$\sigma_p = \mp [a\sigma_a - (1-a)\sigma_b] \quad (7)$$

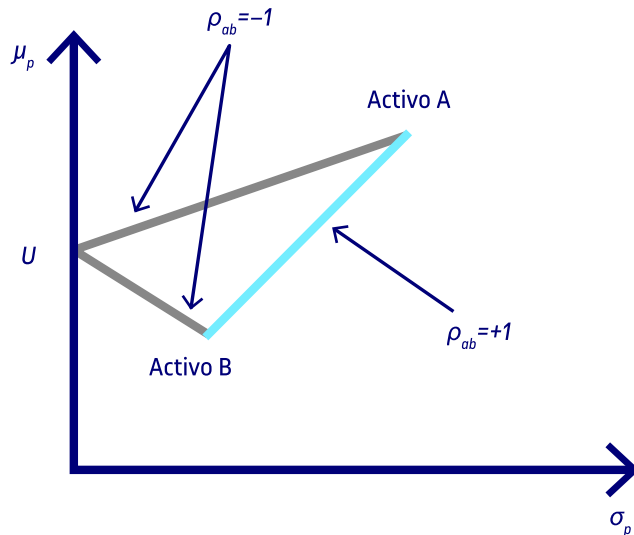
Es decir, matemáticamente, en este caso la solución tiene dos tramos para los cuales la desviación estándar es positiva, dependiendo del valor de W , que se describen en las dos ecuaciones siguientes:

$$\sigma_p = [W\sigma_a - (1-W)\sigma_b] \geq 0 \text{ cuando } W \geq \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \quad (8)$$

$$\sigma_p = -[W\sigma_a - (1-W)\sigma_b] > 0 \text{ cuando } W < \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \quad (9)$$

En palabras, de acuerdo con el valor de W , la condición de que σ_p debe ser mayor o igual a cero se cumple tanto con la raíz cuadrada positiva como con la negativa, configurando una solución que consta de dos tramos que se deben tener en cuenta. En la figura 2 se representan gráficamente las ecuaciones que se acaban de ver, para hacerlas más intuitivas.

Figura 2. Frontera eficiente con dos activos y correlaciones perfectas

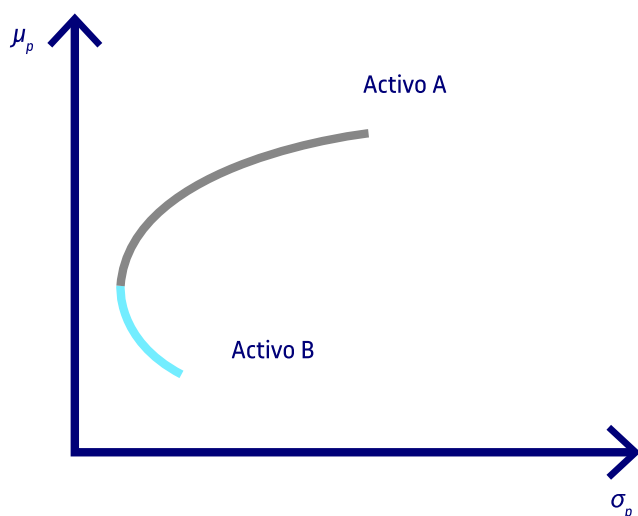


Fuente: elaboración propia

La figura 2 se conoce como *frontera eficiente* de la inversión. Se trata de la relación entre el rendimiento esperado de la cartera, en el eje vertical, y el riesgo asociado, en el eje horizontal, medido como la desviación estándar de la cartera –que, a su vez, depende del valor de la correlación entre los dos activos financieros, como se describió en las ecuaciones (7), (8) y (9)–. Se volverá varias veces sobre los conceptos de *cartera* y *frontera eficiente*.

Las relaciones que se exploran en la figura 2 sirven para delinear los contornos entre los que se pueden mover el rendimiento y el riesgo de la cartera; es decir, ya que es posible observar correlaciones menores que -1 o mayores que 1, el riesgo y el rendimiento de cualquier cartera en el mercado deberá encontrarse dentro de las fronteras del triángulo en la figura 2. No obstante, en la práctica, la correlación entre dos activos nunca es perfectamente negativa o perfectamente positiva, sino que se encuentra en valores intermedios, entre -1 y 1, con lo cual la relación rendimiento esperado y riesgo deja de ser un triángulo y se convierte en una hipérbola, como se muestra en la figura 3.

Figura 3. Frontera eficiente con dos activos y correlaciones estrictamente menores que 1 y estrictamente mayores que -1



Fuente: elaboración propia

La frontera eficiente en la figura 3 específicamente corresponde a las mejores combinaciones entre riesgo y rendimiento entre las cuales un inversionista puede escoger, es decir, aquellas con menor riesgo para un rendimiento dado o mayor rendimiento para un nivel de riesgo dado. Todas las carteras eficientes corresponden a puntos en la parte superior de la hipérbola de la figura 2, que se han resaltado con color rojo.

Recuadro 1. Teorema de fondos mutuos

Hasta ahora se ha ilustrado el problema de encontrar carteras eficientes cuando el inversor tiene la posibilidad de repartir su capital entre dos activos riesgosos, A y B, y también se ha representado gráficamente este problema. En este recuadro se verá que las derivaciones hechas, e incluso las figuras 2 y 3 en el texto, también son aplicables para el caso general de N activos.

Cuando se tienen $N > 2$ activos riesgosos en los que se puede invertir, la forma de la frontera eficiente es la misma que cuando se tienen dos (es una hipérbola); la inclusión de activos adicionales, el único efecto que tiene es el de *permitir una mayor diversificación del riesgo de la cartera*, con lo cual la frontera eficiente se desplaza hacia la izquierda (a cada rendimiento le corresponderá un nivel asociado de riesgo menor), pero la forma hiperbólica sigue siendo la misma.

Para entender esto, puede hacerse el ejercicio mental en el que se empieza con $N = 2$ y se construye una cartera eficiente con estos dos activos. Tal cartera tendrá un rendimiento aleatorio (con una expectativa y una varianza) que dependerá de las proporciones de los dos activos que contiene. Ahora, se puede tratar esta cartera eficiente *como si fuera un solo activo*. Este nuevo activo compuesto se asemeja a un «fondo mutuo» de inversión. A este activo compuesto se le puede identificar

con un punto en la frontera eficiente que se construyó para los dos activos subyacentes, y la ubicación del punto estará determinada por las proporciones que se han invertido en cada activo dentro de la cartera.

Al incluir un tercer activo junto a los dos primeros, el problema de selección de la cartera se puede analizar *como si la elección fuera entre el activo compuesto y el tercer activo* que acaba de aparecer. Con lo cual, aplica el mismo análisis que se hizo para los dos activos, y el resultado es nuevamente una hipérbola que describe la frontera eficiente entre este tercer activo y el fondo mutuo (compuesto por los dos activos originales). Se debe recordar que esta hipérbola, no obstante, estará más a la izquierda que la que describía el caso de los dos activos, al comienzo. El mismo análisis se puede aplicar para $n > 3$, $n > 4$, etc. Con lo cual, al final de cuentas, la representación siempre será una hipérbola que estará lo más desplazada posible hacia la izquierda para el caso de N activos (el máximo número posible).

3.2. Carteras compuestas por activos riesgosos y un activo libre de riesgo

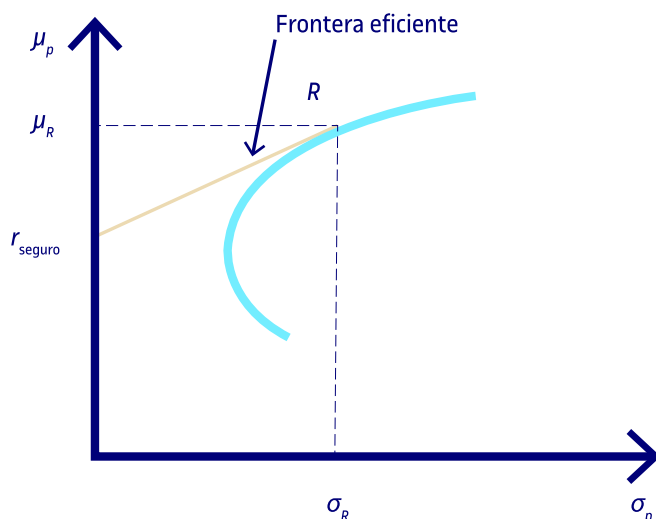
Anteriormente, se ha descrito la situación en la que solo existen en el mercado dos activos riesgosos, entre los cuales un inversionista debe escoger para construir su cartera. Este caso es muy fácilmente generalizable al caso en el que se tengan N activos financieros, siendo N un número arbitrario mayor que 2 gracias al teorema de los fondos mutuos (ver recuadro 1). Sin embargo, hay un caso especialmente interesante, que aparece cuando también se tiene la posibilidad de invertir en un *activo libre de riesgo*.

Un activo libre de riesgo es aquel que ofrece el mismo rendimiento en todos los posibles estados del mundo, o lo que es lo mismo, que ofrece un pago seguro que se llamará, por tanto, r_{seguro} . En estos casos, la frontera eficiente descrita en la figura 3 se convierte en una línea recta, como la que se muestra a continuación en la figura 4. Esta nueva frontera eficiente es la línea recta que une la pareja rendimiento-riesgo del activo seguro (r_{seguro} , 0) con la pareja rendimiento-riesgo de una cartera compuesta únicamente por activos riesgosos, R , (μ_R , σ_R) y que, por tanto, forma parte de los puntos en la hipérbola descrita en la figura 3. Tal línea recta puede ser descrita como:

$$\mu_p = r_{\text{seguro}} + m \cdot \sigma_p \quad (10)$$

donde $m = \frac{\mu_R - r_{\text{seguro}}}{\sigma_R}$. El cálculo de m se realiza utilizando la ecuación de la pendiente de una línea recta entre dos coordenadas.

Figura 4. Frontera eficiente incluyendo un activo libre de riesgo



Fuente: elaboración propia

Fijaos en que, en el caso en que se dispone de un activo libre de riesgo para invertir, es posible elegir el *nivel total de riesgo* de la cartera σ_p , sencillamente cambiando la participación del activo libre de riesgo en la cartera. Por ejemplo, en el caso en el que se decida invertir todo el capital en el activo libre de riesgo, la volatilidad de la cartera será igual a cero, $\sigma_p = 0$, ya que no se estará expuesto a ningún riesgo y se obtendrá el rendimiento ofrecido por el activo libre de riesgo, r_{seguro} . A medida que se incrementa la participación en la cartera de los activos riesgosos, se incrementará el riesgo de la cartera, pero también se incrementará su rendimiento.

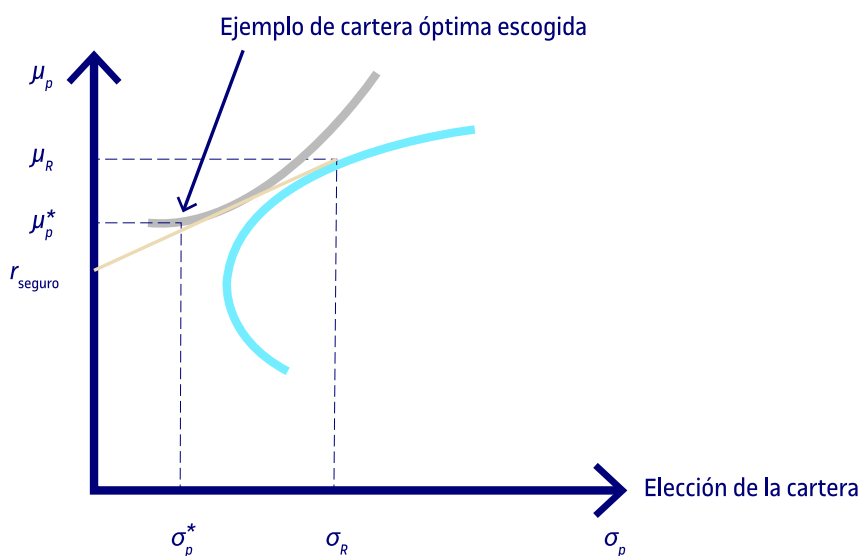
Notad que solo existe un punto en el que la línea gris en la figura 4 (que corresponde a la nueva frontera eficiente) se cruza con la hipérbola azul, que describe la frontera eficiente en el caso en el que no existe un activo riesgoso (figura 3). Este punto corresponde al caso en el que se invierte todo el capital en una cartera compuesta únicamente por activos riesgosos, denominada R , la cual ofrece un rendimiento y riesgo μ_R y σ_R . Esta cartera no está compuesta por ninguna participación del activo libre de riesgo.

3.3. Elección de la cartera óptima en el modelo en media-varianza

En 1990, Harry Markowitz recibió el Premio Nobel (conmemorativo) de Economía por su trabajo sobre la selección de carteras óptimas. Según esta teoría, el problema del inversor financiero se resume en encontrar una cartera óptima que ofrezca el mayor rendimiento para un nivel de riesgo dado o, análogamente, encontrar aquella cartera que minimiza el nivel de riesgo para un rendimiento esperado dado. A tales carteras se les denomina eficientes. Una vez están claras tales carteras, el inversor financiero escogerá una de ellas de acuerdo con su propia actitud frente al riesgo.

¿Por qué cartera se decidirá finalmente el inversor financiero? Como se mencionó antes, esto dependerá de su actitud personal frente al riesgo, o lo que es lo mismo, de su función de utilidad esperada $F(\mu_p, \sigma_p^2) = \mu_p - \theta \sigma_p^2$ y, en particular, del parámetro θ . Matemáticamente, se trata de resolver un problema de optimización sencillo: $F(\mu_p, \sigma_p^2)$ sujeto a una restricción lineal $\mu_p = r_{\text{seguro}} + \frac{\mu_R - r_{\text{seguro}}}{\sigma_R} \sigma_p$. O gráficamente, se trata de encontrar la recta tangente a la curva de indiferencia más alta que el inversionista financiero pueda alcanzar, cuya solución en la figura 5 viene dada por el par (μ_p^*, σ_p^*) .

Figura 5. Elección de la cartera óptima



Fuente: elaboración propia

Hay varios aspectos que vale la pena resaltar de este problema de maximización, que ha llevado a la cartera escogida por el inversor:

- La frontera eficiente (línea gris en la figura 5) es una línea objetiva, es decir, es la misma para todos los inversionistas en el mercado, dado que todos tienen acceso a la misma información y construyen sus expectativas futuras sobre riesgo y rendimiento de igual modo, o sea, mediante esperanzas matemáticas como las vistas en el módulo «Conceptos fundamentales para la administración del riesgo financiero».
- Las curvas de indiferencia, por su parte, son subjetivas, ya que dependen de la función de utilidad esperada de cada inversor y, en particular, del parámetro θ , que mide el nivel de aversión al riesgo individual.
- De acuerdo con el modelo de Markowitz, el riesgo de cada activo financiero, y, por tanto, la decisión sobre cuánto mantener en la cartera de un activo dado, depende **no de su desviación estándar, sino de la covarianza de ese activo con el resto** de los activos riesgosos que componen la cartera de activos riesgosos, ya que esta covarianza gobierna lo que sucede

con la varianza de la cartera, que es lo que interesa como inversores (ver recuadro 2).

Buscando facilitar la aplicación práctica del modelo de Markowitz, William Sharpe planteó el modelo diagonal. Básicamente, este modelo hace el siguiente supuesto: los activos están correlacionados entre sí *únicamente a través de su correlación con un índice de mercado*. Esto es, la razón por la que las correlaciones simples entre las parejas de activos en el mercado parecen ser distintas de cero es porque todos los activos en el mercado están correlacionados, en mayor o menor medida, con un «índice general del mercado», que a su vez responde ante noticias de importancia sobre la economía como un todo y no de un activo en particular, generalmente de carácter macroeconómico. Este supuesto simplifica los cálculos, ya que, para encontrar el *peso* óptimo de un activo financiero en la cartera, no será necesario calcular las covarianzas *entre todos los pares de activos* riesgosos que componen la cartera, sino únicamente la correlación (parcial) de cada activo j con un índice de mercado M . El modelo diagonal sienta las bases del modelo de valoración de activos de capital (CAPM, por sus siglas en inglés), también planteado por William Sharpe y por el cual compartió, en 1990, el Premio Nobel de Economía con H. Markowitz.

4. El modelo CAPM

El modelo CAPM es una extensión del modelo de media-varianza, en el que adicionalmente se supone que hay equilibrio en el mercado. *El equilibrio está caracterizado por un conjunto de precios de los activos financieros, tales que la demanda total de activos iguala a la oferta total.* El CAPM realiza los mismos supuestos que el modelo en media-varianza (función de utilidad cuadrática, expectativas homogéneas, etc.), más los supuestos de que no existen costes de transacción y son posibles las ventas en corto.² Adicionalmente, supone que es posible prestar (y pedir prestadas) cantidades ilimitadas de recursos a la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo, para quien desee hacerlo.

⁽²⁾Se puede pensar en una venta en corto como la posibilidad de vender títulos que originalmente no estaban en el poder del vendedor. Algo así como pedir prestado un título, venderlo, y en un periodo posterior comprarlo de vuelta y devolverlo a su poseedor original (pagando algún interés).

La principal conclusión de este modelo es que, si todos los inversores tienen las mismas creencias (usan el modelo de media-varianza para evaluar sus carteras), conformarán una única cartera de activos riesgosos M , que por tanto se conocerá como *cartera de mercado*. Por supuesto, no todos los inversores repartirán de igual modo sus recursos de capital entre activos riesgosos y el activo libre de riesgo, *pero todos conformarán la misma cartera óptima de activos riesgosos* (es la misma a la que se llamó R en la figura 4, pero que ahora se llamará M , para reflejar que también se está suponiendo el equilibrio de mercado, un supuesto que antes no se hacía).

La participación de cada activo i disponible en el mercado en la cartera de mercado M se denota como $W_{i,m}$ y, de acuerdo con las conclusiones del modelo CAPM, está determinada por la oferta relativa de cada activo i . Es decir, por la siguiente fórmula:

$$W_{i,m} = \frac{\text{Capitalización bursátil título } i}{\text{Capitalización de mercado}} = \frac{P_i \times n_{c,i}}{\sum_{j=1}^N P_j \times n_{c,j}} \quad (11)$$

donde P_i es el precio o cotización actual del activo i y $n_{c,i}$ es el número de títulos en circulación que tiene el activo i (se supone que existen N activos financieros en el mercado). Luego, es posible obtener los rendimientos de la cartera de mercado y su riesgo utilizando las siguientes fórmulas:

$$\mu_M = \sum_{i=1}^N W_{i,m} \mu_i \quad (12)$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{i,m} W_{j,m} \sigma_{ij} \quad (13)$$

Después de conocer las propiedades de la cartera de mercado compartida por todos los inversionistas (su media y varianza), el modelo CAPM predice que las carteras escogidas por los inversores en el mercado se encontrarán sobre la

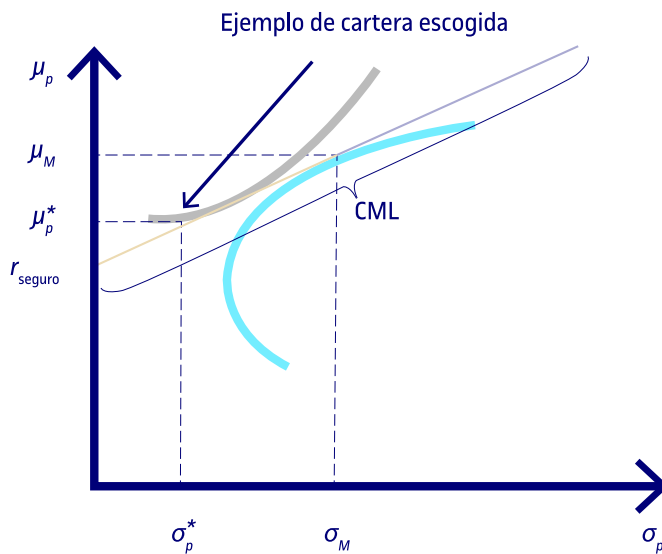
línea del mercado de capitales (*Capital Market Line*, o CML). De hecho, esto ocurre naturalmente porque el CAPM impone equilibrio además de los otros supuestos del modelo en media-varianza, de forma tal que lo que era cierto para el modelo en media-varianza continúa siéndolo para el CAPM (es el mismo modelo más algunos supuestos nuevos).

En efecto, el supuesto de equilibrio lleva a representar el problema gráficamente en la figura 6, de forma similar a como se hizo antes con la figura 5, solo que ahora la cartera de activos riesgosos es M para todos los inversionistas, y no R cada para uno de ellos. Luego, la CML estará descrita por la siguiente ecuación:

$$\mu_p = r_{\text{seguro}} + \frac{\mu_M - r_{\text{seguro}}}{\sigma_M} \sigma_p \quad (14)$$

donde lo único que se ha hecho con respecto a la ecuación del modelo de media-varianza, que describía la frontera eficiente con un activo riesgoso, es $R = M$. A la expresión que corresponde a la pendiente de la CML, $\frac{\mu_M - r_{\text{seguro}}}{\sigma_M}$, se la conoce como *precio del riesgo por unidad de riesgo de mercado*.

Figura 6. Línea del mercado de capitales



Fuente: elaboración propia

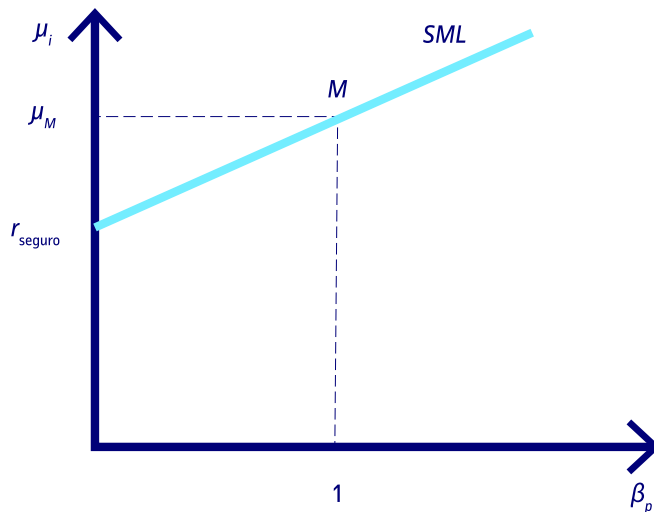
La figura 6 es similar a la figura 5, pero suponiendo equilibrio, por lo que $R = M$. Otra diferencia es que se ha alargado la CML con respecto a lo que era la frontera eficiente para enfatizar el hecho de que el CAPM permite las ventas en corto. De hecho, las carteras que se encuentran en el tramo lila de la CML son carteras más riesgosas (y con mayor rendimiento) que la cartera de mercado, ya que utilizan posiciones cortas con el fin de incrementar la varianza y el rendimiento de la cartera escogida. Pero son igualmente carteras eficientes, puesto que se encuentran sobre la frontera eficiente, que en este caso es la CML.

El modelo CAPM también predice que todos los títulos y carteras (eficientes o no) se situarán en la línea del mercado de títulos (o SML, por las siglas en inglés de *Security Market Line*). La SML establece que el rendimiento de cualquier activo i estará en concordancia con la siguiente relación de valoración:

$$\mu_i = r_{\text{seguro}} + \beta_i(\mu_M - r_{\text{seguro}}) \quad (15)$$

donde $\beta_i = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2}$ no es otra cosa que la correlación parcial del rendimiento del activo i con el rendimiento de la cartera de mercado M (ver recuadro 1 para los detalles de la derivación). Luego, el rendimiento en equilibrio de un activo cualquiera depende únicamente de su «beta», β_i , ya que los otros términos en la ecuación (15) son comunes a todos los activos. Una representación gráfica de los conceptos que se acaban de desarrollar en el plano (β, μ) se presenta en la figura 7. Sobre esta línea se encuentran todos los activos en equilibrio, ya que un comportamiento distinto (por debajo o por encima de la línea) representa una oportunidad de arbitraje.

Figura 7. Línea del mercado de títulos



Fuente: elaboración propia

En resumen, el coeficiente β_i indica la sensibilidad de la serie de rendimientos del activo i en relación con las variaciones del mercado. Aquellos títulos, o carteras, con una $\beta_i > 1$ tienen un riesgo superior a la cartera de mercado y se denominan *agresivos* (reaccionan más que proporcionalmente a las variaciones del mercado); en tanto que los títulos, o carteras, con una $\beta_i < 1$ tienen un riesgo inferior al del mercado y se denominan *defensivos* (reaccionan menos que proporcionalmente a las variaciones del mercado y son, por ende, inversiones más conservadoras).

Recuadro 2. Carteras eficientes y relación de valoración

Este recuadro es más técnico que el resto del módulo y presupone cierta familiaridad con el cálculo. Las carteras eficientes se definen como aquellas que maximizan el rendimiento esperado de la inversión para un nivel de riesgo dado, o que, alternativamente, minimizan el riesgo para un rendimiento esperado dado. Se trata de un problema «dual», que puede abordarse de ambas formas.

Supóngase que la cartera P presenta el rendimiento esperado μ_P con un nivel de riesgo asociado σ_P . Por otra parte, la participación en la cartera del activo sin riesgo viene dada por W_0 y la inversión en el activo riesgoso j viene dada por W_j . Todo el capital debe ser invertido de forma tal que los cambios positivos en la tenencia del activo seguro denominados ΔW_0 deberán ser financiados con reducciones en la tenencia de activos riesgosos, ΔW_j , de forma tal que se cumple que $W_0 = -W_j$.

Dado lo anterior, si se decide incrementar la participación de activos riesgosos en la cartera se puede esperar que el rendimiento de la inversión cambie en la siguiente cuantía: $\Delta\mu_P = (\mu_j - r_{seguro})\Delta W_j$. O en palabras, el rendimiento esperado medio se incrementa de acuerdo con el rendimiento esperado del activo riesgoso j , menos lo que se pierde de rendimiento seguro al reducir la participación del activo libre de riesgo buscando financiar la compra del activo riesgoso. Finalmente, el exceso de rendimiento que se gana debe multiplicarse por la cantidad de activo riesgoso que se compró: ΔW_j .

Algo similar ocurre con el riesgo de la cartera, que se incrementará de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\Delta\sigma_P = \beta_{jP}\sigma_P\Delta W_j, \text{ donde } \beta_{jP} = \frac{\sigma_{jP}}{\sigma_P^2}$$

Para ver lo anterior más claramente, se pueden utilizar algunas herramientas del cálculo. En particular, interesa la derivada parcial de la medida de riesgo σ_P contra cambios en la tenencia del activo riesgoso.

De recordarse que $\sigma_P = \sqrt{(\sigma_P^2)} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}$. Esta es la expresión para la desviación estándar de una cartera compuesta por N activos. Tomando la derivada parcial respecto a la participación del activo riesgoso j , se tendrá que:

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial W_j} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}-1} \left[2 \sum_{i=1}^N W_i \sigma_{ij} \right]$$

donde el último término al lado derecho hace uso de la «regla de la cadena» para la derivación. Esta expresión se puede organizar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial W_j} = (\sigma_P^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N W_i \sigma_{ij}$$

Se define $\sum_{i=1}^N W_i \sigma_{ij} = \sigma_{jP}$ para enfatizar el hecho de que esta expresión es sencillamente la covarianza del activo j con todos los N activos que componen la cartera P . Luego, se tiene que:

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial W_j} = \sigma_P^{-1} \sigma_{jP}$$

Ahora, se multiplica por el término $\frac{\sigma_P}{\sigma_P}$, lo cual no altera la expresión ya que es igual a 1, y se obtiene $\frac{\partial \sigma_P}{\partial W_j} = \frac{\sigma_{jP}}{\sigma_P^2} \sigma_P$ y, finalmente, $\frac{\partial \sigma_P}{\partial W_j} = \beta_{jP} \sigma_P$. Si se cambia la notación a tiempo discreto, en el cual los cambios son escritos como Δ , en lugar de ∂ se tiene que $\frac{\Delta \sigma_P}{\Delta W_j} = \beta_{jP} \sigma_P$, o alternatively:

$$\Delta \sigma_P = \beta_{jP} \sigma_P \Delta W_j$$

que se corresponde con la expresión del principio del recuadro.

En resumen, ahora se tiene el **cambio** en el **rendimiento**, $\Delta \mu_P = (\mu_j - r_{\text{seguro}}) \Delta W_j$ (a), y el **riesgo**, $\Delta \sigma_P = \beta_{jP} \sigma_P \Delta W_j$ (b), que es consecuencia de incrementar la participación en la cartera del activo riesgoso j . β_{jP} , en la segunda expresión, captura la relación que existe entre las variaciones de la tasa de rendimiento del activo j y la tasa de rendimiento de la cartera P .

Ahora se puede pensar en las condiciones necesarias para que la cartera P sea eficiente. Por ejemplo, si la cartera P es eficiente, la ratio $\frac{\Delta \mu_P}{\Delta \sigma_P} = \frac{(\mu_j - r_{\text{seguro}}) \Delta W_j}{\beta_{jP} \sigma_P \Delta W_j}$ debe ser igual para todos los activos, *sin importar cuál sea el activo j* ; es decir, para todo $j = 1, 2 \dots N$. Si no fuera este el caso, entonces no sería eficiente, ya que sería posible aumentar el rendimiento relativo al riesgo (o disminuir el riesgo relativo al rendimiento) con algún cambio en la composición de la cartera.

Entonces, se tendrá que, para que se cumpla que la cartera P es eficiente, deberá ser cierto que:

$$\frac{(\mu_1 - r_{\text{seguro}}) \Delta W_1}{\beta_{1P} \sigma_P \Delta W_1} = \frac{(\mu_2 - r_{\text{seguro}}) \Delta W_2}{\beta_{2P} \sigma_P \Delta W_2} = \dots = \frac{(\mu_N - r_{\text{seguro}}) \Delta W_N}{\beta_{NP} \sigma_P \Delta W_N}$$

Ahora se pueden cancelar los términos iguales en el numerador y denominador de las expresiones:

$$\frac{(\mu_1 - r_{\text{seguro}})}{\beta_{1P}\sigma_P} = \frac{(\mu_2 - r_{\text{seguro}})}{\beta_{2P}\sigma_P} = \dots = \frac{(\mu_N - r_{\text{seguro}})}{\beta_{NP}\sigma_P}$$

Finalmente, se puede notar que esta expresión también debe cumplirse *para la misma cartera eficiente* (porque se cumple para todos los activos riesgosos, y la cartera eficiente es una combinación lineal de estos, o sea, un activo riesgoso compuesto). La cartera de mercado se caracteriza por tener un beta igual a 1, $\beta_{PP} = 1$, ya que se trata de su propio beta, por lo que se puede agregar al final de la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{(\mu_1 - r_{\text{seguro}})}{\beta_{1P}\sigma_P} = \frac{(\mu_2 - r_{\text{seguro}})}{\beta_{2P}\sigma_P} = \dots = \frac{(\mu_N - r_{\text{seguro}})}{\beta_{NP}\sigma_P} = \frac{(\mu_P - r_{\text{seguro}})}{\sigma_P}$$

La expresión anterior se resume para el activo j como:

$$\frac{(\mu_j - r_{\text{seguro}})}{\beta_{jP}\sigma_P} = \frac{(\mu_P - r_{\text{seguro}})}{\sigma_P}$$

O, equivalentemente:

$$\mu_j = r_{\text{seguro}} + \beta_{jP}(\mu_P - r_{\text{seguro}})$$

que es la expresión de valoración de activos respecto a la cartera P . Cuando se reemplaza la cartera P por la cartera de mercado M (suponiendo equilibrio), se obtiene la relación de valoración fundamental del modelo CAPM.

4.1. El CAPM empírico

En la práctica, el modelo CAPM se estima a través de un modelo de regresión lineal, de la siguiente forma:

$$r_{i,t} - r_f = \alpha_i + \hat{\beta}_i(r_{M,t} - r_f) + \epsilon_{it} \quad (16)$$

donde r_{it} son los rendimientos observados del activo i , en el tiempo, el cual se quiere valorar, r_f es una variable *proxy* del activo libre de riesgo (generalmente, el rendimiento de un título del gobierno, con la mayor liquidez), $r_{M,t}$ es una *proxy* del rendimiento de mercado (generalmente, el índice bursátil del país, como el IBEX-35 en España o el SP500 en Estados Unidos). $\hat{\beta}_i$ es la pendiente de una regresión de la serie $(r_{i,t} - r_f)$ contra la serie $(r_{M,t} - r_f)$, o lo que es lo mismo, la correlación parcial de las dos series. Por su parte, α_i es el intercepto de tal regresión y ϵ_{it} es el residuo de la regresión.

El CAPM predice que $\alpha_i = 0$, y en el caso de que no lo sea, por ejemplo si $\alpha_i > 0$, se trata de algún rendimiento anormal de una acción subvalorada que el inversor podría explotar. Si $\alpha_i < 0$, la acción está sobrevalorada, ya que está comportándose peor de lo que predice el modelo CAPM (a este indicador se lo conoce algunas veces como *índice de Jensen*). Por otra parte, el riesgo de la cartera o activo estará dado por:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_e^2 \quad (17)$$

donde $\beta_i^2 \sigma_M^2$ mide el riesgo sistemático o de mercado que depende de factores comunes a todos los títulos, por ejemplo, de tipo macroeconómico, mientras que σ_e^2 mide el riesgo específico o idiosincrático de cada activo. Este último riesgo es diversificable, ya que si el inversor decide poner su capital en más de un activo, será cada vez más pequeño –y de hecho es cero en las carteras eficientes–, por lo que el verdaderamente relevante es el primero. El segundo, de estar presente, no será compensado por el mercado con mayor rendimiento.

5. Modelos multifactoriales y teoría de valoración de arbitraje

El modelo CAPM ofrece un sólido punto de partida para estimar el rendimiento esperado de un activo (y, por ende, el coste de capital de una empresa que cotice en bolsa), siempre que se esté dispuesto a hacer el supuesto de que toda la información relevante para la medición del riesgo sistemático se encuentra sintetizada en un solo índice de mercado. En la práctica, el desempeño del modelo es muchas veces pobre, por lo que la literatura ha explorado otros «factores» que puedan ampliar el alcance del modelo original y, sobre todo, mejorar su desempeño en la práctica. A estas extensiones del modelo CAPM se las conoce como *modelos multifactoriales* (ya que, además del factor de mercado, proponen otros factores comunes o sistemáticos que determinan, junto al de mercado, el rendimiento esperado de cada activo).

Un modelo de este tipo que funciona relativamente bien en la práctica es el modelo de tres factores, propuesto por Eugene Fama y Kenneth French en la década de los noventa. No se trata de un modelo tan elegante como el CAPM, ya que los factores fueron propuestos porque servían en la práctica y no tienen intuiciones tan claras como las del modelo CAPM, pero lo cierto es que se trata de un modelo que mejora considerablemente el desempeño en los datos relativos al CAPM. Este modelo se expresa de la siguiente forma:

$$\tilde{r}_t = a + b_M \tilde{r}_M + b_{SMB} r_{SMB} + b_{HML} r_{HML} + \epsilon_t \quad (18)$$

donde las variables con una virgulilla indican que se ha sustraído el rendimiento del activo libre de riesgo de la serie original. $\tilde{r}_M$ es el rendimiento del mercado por encima del activo libre de riesgo. El segundo factor, denominado *SMB*, es una *proxy* del riesgo asociado al tamaño de la empresa en la cual se invierte, medida por su capitalización bursátil. Este factor se construye como la diferencia de los rendimientos entre las carteras de empresas «más pequeñas» y las «más grandes». Por último, el factor *HML* es una *proxy* del riesgo asociado a la ratio valor en libros sobre valor en bolsa, que consiste en el cociente del valor en libros de la acción y el valor de mercado de la misma. Esta representa la diferencia entre el rendimiento de las carteras con más alta y más baja ratio valor en libro / valor en bolsa. A la inversión que explota el primer factor se la denomina, naturalmente, *estrategia de valor*, mientras que a la que explota el tamaño se la denomina *estrategia de crecimiento*. Ambas han sido ampliamente documentadas en la literatura y la práctica, y se las incluye habitualmente como una *proxy* para ciertos factores sistemáticos no capturados en el índice de mercado.

En la práctica se han propuesto otros muchos factores de riesgo, que incluyen el factor de *momentum*, que mide la persistencia de las tendencias alcistas o bajistas en el mercado, factores de liquidez y otros muchos. Todos estos modelos encuentran su base en la teoría de valoración de arbitraje, que básicamente parte del principio de arbitraje, el cual establece que no existen oportunidades de arbitraje, o lo que es lo mismo, que no será posible conformar carteras de arbitraje. Estas son carteras que ofrecen rendimientos gratis (más que proporcionales en relación con el riesgo asumido). En la práctica, este principio de (no)arbitraje se puede expresar con la forma de un modelo multifactorial de los rendimientos de cualquier activo:

$$r_j = b_{j0} + b_{j1}F_1 + b_{j2}F_2 + \dots + b_{jK}F_K + \epsilon_j \quad (19)$$

con el número de factores K mucho menor que el número de activos en el mercado N . Se tiene, en este caso, que:

$$E(\epsilon_j | F_1) = E(\epsilon_j | F_2) = \dots = E(\epsilon_j | F_K) = 0 \quad (20)$$

Es decir, no es posible predecir el término de error usando la información contenida en los factores.

En principio, no existen (muchas) restricciones sobre lo que puede ser un factor, por lo que la literatura ha explorado cientos de ellos y, en épocas recientes, ha incluso utilizado técnicas de aprendizaje con máquinas para detectar cuáles son los factores más relevantes.

6. Caso de estudio

6.1. Mercado con tres títulos

Suponed un mercado de valores en equilibrio en el cual únicamente cotizan cuatro títulos (1, 2, 3 y 4), de los que se conoce el número de acciones en circulación, el precio de cotización actual, el rendimiento esperado y el riesgo. Dicha información se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 1. Datos de los títulos

	Número de acciones	Cotización actual	Rendimiento esperado	Riesgo
Título 1	50.000	38	35 %	78 %
Título 2	87.000	57	21 %	94 %
Título 3	58.000	84	19 %	35 %
Título 4	43.000	34	37 %	43 %

También se sabe que el coeficiente de correlación entre los títulos 1 y 2 es -1, el resto de los coeficientes de correlación es 0. El tipo de interés libre de riesgo es 4,25 %. Como inversores, estaréis interesados en:

- 1) Obtener la composición de la cartera de mercado.
- 2) Obtener el rendimiento y el riesgo de la cartera de mercado.
- 3) Obtener la beta de los cuatro títulos.
- 4) Obtener la ecuación del modelo CAPM que relaciona el rendimiento esperado de un activo eficiente con el riesgo beta de dicho activo (la línea del mercado de títulos).
- 5) Obtener el precio del riesgo por unidad de precio de mercado.

6.1.1. Solución

Composición de la cartera de mercado

La cartera de mercado es aquella que está formada por todos los títulos del mercado y, en igual proporción, que están en el mercado. Por tanto, la proporción de cada activo i ($W_{i,m}$) en la cartera de mercado será:

$$W_{i,m} = \frac{\text{Capitalización bursátil título } i}{\text{Capitalización de mercado}} = \frac{P_i \times n_{c,i}}{\sum_{j=1}^N P_j \times n_{c,j}}$$

como indica la ecuación (11) en el texto. Donde P_i es el precio o cotización actual del activo i y $n_{c,i}$ es el número de títulos en circulación que tiene el activo i .

En primer lugar, en la siguiente tabla se obtiene la capitalización bursátil de cada activo y, agregando las capitalizaciones de todos los activos, la capitalización del mercado:

Tabla 2. Capitalización bursátil de los activos

	Número de acciones	Cotización actual	Capitalización bursátil
Título 1	50.000	38	1.900.000
Título 2	87.000	57	4.959.000
Título 3	58.000	84	4.872.000
Título 4	43.000	34	1.462.000
			13.193.000

donde la capitalización bursátil del mercado es **13.193.000**.

En segundo lugar, se obtienen las ponderaciones de cada activo:

$$M \rightarrow \begin{cases} W_{1,m} = \frac{1.900.000}{13.193.000} = 0,14402 \\ W_{2,m} = \frac{4.959.000}{13.193.000} = 0,37588 \\ W_{3,m} = \frac{4.872.000}{13.193.000} = 0,36929 \\ W_{4,m} = \frac{1.462.000}{13.193.000} = 0,11082 \end{cases}$$

donde, por ejemplo, la proporción del activo 1 en la cartera de mercado es 14,40 %.

Rendimiento y riesgo de la cartera de mercado

Para obtener el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera de mercado, se emplean las expresiones que se han visto en el texto. Concretamente, en las ecuaciones (12) y (13).

$$\mu_M = \sum_{i=1}^N W_{i,m} \mu_i$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{i,m} W_{j,m} \sigma_{ij}$$

$$\mu_M = 0,1440 \times 35 \% + 0,3759 \times 21 \% + 0,3693 \times 19 \% + 0,1108 \times 37 \% = 24,05 \%$$

$$\sigma_m^2 = W_{1,m}^2 \sigma_1^2 + W_{2,m}^2 \sigma_2^2 + W_{3,m}^2 \sigma_3^2 + W_{4,m}^2 \sigma_4^2 +$$

$$2 \times W_{1,m} \times W_{2,m} \times \text{Cov}(1,2) + 2 \times W_{1,m} \times W_{3,m} \times \text{Cov}(1,3)$$

$$+ 2 \times W_{1,m} \times W_{4,m} \times \text{Cov}(1,4) +$$

$$2 \times W_{2,m} \times W_{3,m} \times \text{Cov}(2,3) + 2 \times W_{2,m} \times W_{4,m} \times \text{Cov}(2,4)$$

$$+ 2 \times W_{3,m} \times W_{4,m} \times \text{Cov}(3,4)$$

$$0,1440^2 \times 78 \% + 0,3759^2 \times 94 \% + 0,3693^2 \times 35 \% + 0,1108^2 \times 43 \%$$

$$2 \times 0,1440 \times 0,3759 \times (-85,627 \%) = 10,93 \%$$

Notad que $\sigma_{12} = \text{Cov}(1,2) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = (-1) \times \sqrt{78} \times \sqrt{94} = -85,627 \%$.

Notad que $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{14} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{24} = 0$, $\sigma_{34} = 0$. Los coeficientes de correlación son cero y, en consecuencia, las covarianzas también.

Betas de los cuatro activos

De acuerdo con el modelo CAPM, se obtiene la beta de los cuatro activos:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{Mi}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

Para ello, previamente se deberá obtener la covarianza de cada activo i con la cartera de mercado, esto es, $\text{Cov}(R_i, R_M) = \sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{j=N} W_j \sigma_{ij}$.

$$\sigma_{1m} = W_1 \sigma_{11} + W_2 \sigma_{12} + W_3 \sigma_{13} + W_4 \sigma_{14} =$$

$$0,1440 \cdot 78 + 0,3759 \cdot (-85,627) + 0 + 0 = -20,95 \%$$

$$\sigma_{2m} = W_1\sigma_{21} + W_2\sigma_{22} + W_3\sigma_{23} + W_4\sigma_{24} =$$

$$0,1440 \cdot (-85,627) + 0,3759 \cdot 94 + 0 + 0 = 23,00 \%$$

$$\sigma_{3m} = W_1\sigma_{31} + W_2\sigma_{32} + W_3\sigma_{33} + W_4\sigma_{34} =$$

$$0 + 0 + 0,3693 \cdot 35 + 0 = 12,93 \%$$

$$\sigma_{4m} = W_1\sigma_{41} + W_2\sigma_{42} + W_3\sigma_{43} + W_4\sigma_{44} =$$

$$0 + 0 + 0 + 0,1108 \cdot 43 = 4,77 \%$$

Notad que $\sigma_{12} = -85,627 \%$, $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{14} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{24} = 0$, $\sigma_{34} = 0$.

Se puede comprobar que el riesgo de la cartera de mercado también se puede obtener a partir de las σ_{im} :

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{i=N} W_i \sigma_{im} =$$

$$0,1440 \cdot (-20,95) + 0,3759 \cdot 23,00 + 0,3693 \cdot 12,93 + 0,1108 \cdot 4,77 =$$

$$10,93 \%$$

A continuación, se obtiene la beta de cada activo:

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_m^2} = \frac{-20,95}{10,93} = -1,917$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_m^2} = \frac{23,00}{10,93} = 2,105$$

$$\beta_3 = \frac{\sigma_{3m}}{\sigma_m^2} = \frac{12,93}{10,93} = 1,183$$

$$\beta_4 = \frac{\sigma_{4m}}{\sigma_m^2} = \frac{4,77}{10,93} = 0,436$$

Línea del mercado de activos

El equilibrio del modelo CAPM que relaciona el rendimiento esperado de un activo con su riesgo beta está dado por la siguiente expresión (ecuación (15) en el texto):

$$\mu_i = r_{\text{seguro}} + \beta_i (\mu_M - r_{\text{seguro}})$$

Sustituyendo la rentabilidad de la cartera de mercado y el tipo de interés libre de riesgo (4,25 %):

$$\mu_i = 4,25 \% + \beta_i [24,05 \% - 4,25 \%]$$

Precio del riesgo por unidad de precio de mercado

El precio del riesgo por unidad de precio de mercado está dado por la siguiente expresión, de acuerdo con lo visto en el módulo:

$$\text{Precio del riesgo por unidad de riesgo de mercado} = \frac{\mu_m - r_{\text{seguro}}}{\sigma_m}$$

Sustituyendo la rentabilidad esperada y el riesgo de mercado

($\sigma_m = \sqrt{\sigma_m^2} = 3,31 \%$), y el tipo de interés libre de riesgo (4,25 %), se tiene:

$$\text{Precio del riesgo por unidad de riesgo de mercado} = \frac{24,05 \% - 4,25 \%}{3,31} = 5,98 \%$$

6.2. Modelos de valoración de activos por factores

La página web de Kenneth French alberga interesante información sobre los rendimientos de los títulos de valores en el mercado de renta variable de Estados Unidos, así como una gran variedad de factores que los explican. En particular, de los tres factores propuestos por el autor y el coautor, Eugene Fama, como alternativa al modelo CAPM en la década de los noventa (prima por riesgo del mercado, factor de riesgo SMB y factor de riesgo HML). La información se actualiza con una frecuencia mensual y las fichas metodológicas permiten ir al detalle de los cálculos realizados. Supóngase que se ha descargado la información sobre los tres factores mensuales del modelo de Fama-French para el periodo comprendido entre enero del 2015 y diciembre del 2019. Adicionalmente, se dispone del rendimiento del activo libre de riesgo y los rendimientos mensuales de una cartera representativa del sector «Energía» para el mismo periodo temporal. Toda esta información adicional también se obtiene de la misma página web.

Ahora, se puede:

- Estimar el modelo de valoración de activos CAPM para la cartera representativa del sector «Energía». ¿Cómo interpretar el coeficiente beta estimado y su significatividad estadística?

Kenneth French

http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html#Research

- Estimar el modelo de valoración de activos de tres factores de Fama y French para la cartera representativa del sector «Energía». ¿Cómo se interpretarían las betas estimadas y su significatividad estadística?
- ¿Qué información proporciona el intercepto de las regresiones estimadas?
- Finalmente, también será posible comentar la capacidad explicativa de los dos modelos de valoración de activos.

Para estimar los modelos de valoración de activos se recomienda utilizar una hoja de cálculo Excel –o la función *lm()* en el software estadístico *R* (ver recuadro 3).

Recuadro 3. Algoritmo práctico de estimación usando una hoja de Excel

Antes de estimar es importante recordar que, en las expresiones de valoración de los dos modelos, la variable dependiente es el rendimiento en exceso del activo o la cartera, definido como la diferencia entre el rendimiento del activo o la cartera menos el rendimiento del activo libre de riesgo. Por tanto, en primer lugar, deberéis calcular el rendimiento en exceso de la cartera.

Modelo CAPM:

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \varepsilon_t$$

Modelo de Fama-French:

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \beta_{smb} SMB_t + \beta_{hml} HML_t + \varepsilon_t$$

- Para estimar los modelos en Excel, necesitaréis instalar la herramienta «Análisis de Datos» de Excel. Para ello, deberéis hacer clic en «Archivo» > «Opciones» > «Complementos» > «Herramientas para análisis-VBA» > «Ir» > «Seleccionar herramientas para el análisis» > «Aceptar». Una vez hecho esto, en el menú «Datos de Excel» os aparecerá una nueva herramienta: «Análisis de datos».
- Para estimar los modelos mediante una regresión lineal en Excel, deberéis hacer clic en «Análisis de Datos» > «Regresión» > «Aceptar». Se abrirá una ventana en la que deberéis seleccionar:
 - «Rango Y de entrada»: la variable dependiente (rendimiento en exceso de la cartera). Es recomendable seleccionar también la celda donde tenéis el nombre de la variable.
 - «Rango X de entrada»: las variables explicativas o factores. El número de factores dependerá del modelo que estéis estimando. Es recomendable seleccionar también la celda o celdas donde tenéis el nombre o los nombres del factor o los

factores. De ese modo, el nombre de los factores aparecerá junto a su estimación en el resultado de la regresión.

- Marcad la opción «Rótulos» para facilitar la lectura de los resultados.
- Podéis escoger la opción de salida.
- Del resto de la ventana, no hace falta seleccionar nada más.

Una vez hecho esto, visualizaréis el resultado de la estimación. La información importante para vosotros serán el coeficiente de determinación R^2 , y la última tabla con los coeficientes estimados y la información sobre su significatividad (utilizad un nivel de significatividad del 5 %).

Solución

- Modelo de valoración de activos CAPM para la cartera representativa del sector «Energía»

Utilizando la información proporcionada en el recuadro 3 y seleccionando como variable explicativa el factor de riesgo de mercado, se obtiene el resultado de la estimación del modelo de valoración de activos CAPM:

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \varepsilon_t$$

Resumen										
Estadísticas de la regresión										
Coeficiente de correlación múltiple	0,715717451									
Coeficiente de determinación R2	0,512251469									
R2 ajustado	0,503842012									
Error típico	4,294073013									
Observaciones	60									
Análisis de varianza										
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F					
Regresión	1	1123,192217	1123,192217	60,91373592	1,30211E-10					
Residuos	58	1069,465657	18,43906304							
Total	59	2192,657873								
	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95 %	Superior 95 %	Inferior 95,0 %	Superior 95,0 %		
Intercepción	-1,152074752	0,571364104	-2,016358296	0,048401435	-2,295784269	-0,008365234	-2,295784269	-0,008365234		
Mkt-RF	2143,29618	0,155589029	7,80472523	1,30211E-10	0,902884339	1,525774897	0,902884339	1,525774897		

El coeficiente β_m estimado es igual a 1,21. Además, se puede comprobar que es estadísticamente significativo, con un nivel de significancia del 5 % ($p\text{-valor} = 0,000 < 0,05$). Este coeficiente representa la exposición de la cartera al riesgo de mercado. En este caso, dado que el coeficiente estimado es mayor que 1 indica que la cartera representativa del sector «Energía» presenta una mayor variabilidad que la cartera de mercado y, por tanto, amplificará los movimientos del mercado tanto al alza como a la baja. Se trata de una inversión agresiva.

- M de valoración de activos de tres factores de Fama y French para la cartera representativa del sector «Energía»

Utilizando la información proporcionada en el recuadro 3 y seleccionando como variables explicativas las columnas que contienen los factores de riesgo de mercado, riesgo de tamaño y riesgo VC/VM, se obtiene el resultado de la estimación del modelo de valoración de activos de tres factores de Fama-French en la hoja titulada «Fama-French».

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \beta_{smb} SMB_t + \beta_{hml} HML_t + \varepsilon_t$$

Resumen								
Estadísticas de la regresión								
Coefficiente de correlación múltiple	0,824068096							
Coefficiente de determinación R2	0,679088227							
R2 ajustado	0,661896525							
Error típico	3,544738874							
Observaciones	60							
Análisis de la varianza								
	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F			
Regresión	3	1489,008147	496,3360489	39,50093021	7,58649E-14			
Residuos	56	703,6497265	12,56517369					
Total	59	2192,657873						
	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95 %	Superior 95 %	Inferior 95,0 %	Superior 95,0 %
Intercepción	-0,709216488	0,479165262	-1,480108314	0,144448623	-1,669099832	0,250666876	-1,669099832	0,250666876
Mkt-RF	1,12088592	0,134158861	8,352611708	2,03951E-11	0,852059307	1,389712534	0,852059307	1,389712534
SMB	0,499102314	0,203062444	2,457876024	0,017096551	0,092319356	0,905885271	0,092319356	0,905885271
HML	0,795876564	0,177675537	4,479381794	3,73676E-05	0,439949694	1,151803434	0,439949694	1,151803434

Cada coeficiente beta estimado representa la exposición de la cartera a los diferentes factores de riesgo.

El coeficiente β_m es igual a 1,12. Además, se puede comprobar que es estadísticamente significativo, con un nivel de significancia del 5 % ($p\text{-valor} = 0,000 < 0,05$). Este coeficiente representa la exposición de la cartera al riesgo de mercado. En este caso, dado que el coeficiente estimado es mayor que 1 indica que la cartera representativa del sector «Energía» presenta una mayor variabilidad que la cartera de mercado y, por tanto, amplificará los movimientos del mercado tanto al alza como a la baja. Es importante destacar que, al introducir los dos factores de riesgo adicionales de este modelo, el riesgo beta ha disminuido respecto al estimado con el modelo CAPM, aunque sigue siendo mayor que 1. Continúa siendo una inversión agresiva.

El coeficiente β_{smb} estimado es igual a 0,49. Además, se puede comprobar que es estadísticamente significativo, con un nivel de significancia del 5 % ($p\text{-valor} = 0,017 < 0,05$). Este coeficiente representa la exposición de la cartera al riesgo de tamaño, se espera que las empresas con menor capitalización bursátil ofrezcan una mayor rentabilidad ya que tienen un mayor riesgo que las de mayor capitalización. En este caso, dado que el coeficiente estimado es positivo indica que la exposición al riesgo de tamaño es positiva y que este factor de riesgo es importante para valorar la cartera del sector «Energía». Es decir, parte del rendimiento extraordinario (por encima del mercado) de la cartera del sector energía se debe a que se está explotando la estrategia de invertir en acciones *pequeñas* (que generan mayores rendimientos), más que invertir en acciones grandes.

El coeficiente β_{hml} es igual a 0,79. Además, se puede comprobar que es estadísticamente significativo, con un nivel de significancia del 5

% ($p\text{-valor} = 0,00 < 0,05$). Este coeficiente representa la exposición de la cartera al riesgo de «valor» medido a través del cociente valor contable / valor de mercado. Se espera que las empresas con mayor ratio *book-to-market* ofrezcan una mayor rentabilidad. En este caso, dado que el coeficiente estimado es positivo y significativo indica que la exposición al riesgo de «valor» es positiva y que este factor de riesgo es importante para valorar la cartera del sector «Energía». Es decir, parte del rendimiento extraordinario (por encima del mercado) de la cartera del sector energía se debe a que se está explotando la estrategia de invertir en acciones de *valor* (que están infravaloradas), más que invertir en acciones de *crecimiento* (con potencial de comportarse mejor que el mercado, con el tiempo).

- ¿Qué información proporciona el intercepto de las regresiones estimadas?

El intercepto de las regresiones representa el coeficiente alfa de los modelos siguientes:

Modelo CAPM:

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \varepsilon_t$$

Modelo de Fama-French:

$$R_t - r_t = \alpha + \beta_m (R_{mt} - r_t) + \beta_{smb} SMB_t + \beta_{hml} HML_t + \varepsilon_t$$

En el modelo CAPM, se puede interpretar este coeficiente como la parte de rendimiento del activo que no está relacionada con el mercado, es decir, como la diferencia entre el rendimiento medio de un activo y el rendimiento que predice el CAPM dado el riesgo del activo. Puede ser visto como una medida del rendimiento ajustado por el riesgo beta. El coeficiente alfa estimado es significativo, con un nivel de significancia del 5 %, según indica su $p\text{-valor} = 0,048$, y puede ser debido a que se está omitiendo algún factor de riesgo importante para la explicación de los rendimientos. Si el coeficiente alfa estimado es estadísticamente mayor que cero, el activo tiene un rendimiento superior al sugerido por su riesgo beta. Si el coeficiente alfa estimado es estadísticamente menor que cero, el activo tiene un rendimiento inferior al sugerido por su riesgo beta. En este caso, es significativo y negativo (-1,15), lo que indica que la cartera del sector «Energía» tiene un rendimiento inferior al sugerido por su riesgo beta.

En el modelo de Fama-French, el coeficiente alfa se interpreta como una medida del rendimiento ajustado por el riesgo de los tres factores: factor de riesgo de mercado, factor de riesgo asociado al tamaño y factor de riesgo asociado al cociente VC/VM. Tal como se observa ($p\text{-valor} = 0,144 > 0,05$), al introducir los dos factores de riesgo adicionales, el coeficiente alfa ya no es significativo, confirmando que en el modelo CAPM se está omitiendo algún factor de riesgo.

- Comentar la capacidad explicativa de los dos modelos de valoración de activos

La capacidad explicativa de los modelos viene indicada por el coeficiente de determinación R^2 . El coeficiente de determinación indica qué porcentaje de la varianza de la variable dependiente viene explicada por el modelo. Para el modelo CAPM, el coeficiente de determinación de la regresión es 0,512, por tanto, un 51,2 % de la variabilidad de los rendimientos de la cartera del sector «Energía» vendrían explicados por el modelo CAPM. En el caso del modelo de Fama y French, el coeficiente de determinación es 0,679. Por tanto, al introducir los dos factores de riesgo adicionales, el coeficiente de determinación ha incrementado del 51,2 % al 67,9 %. En cualquier caso, este coeficiente de determinación sigue estando alejado de 1, lo que sugiere que existen factores de riesgo adicionales a los que está expuesta la cartera que se han omitido en la regresión. A este respecto, en la literatura financiera se han propuesto factores de riesgo adicionales, como por ejemplo el factor *momentum* o de liquidez (entre muchos otros).

