

Simetría y diseño

Pere Cruells
Germán Sáez

PID_00150818

Índice

1. Aplicaciones del plano.....	5
1.1. Introducción	5
1.2. Tipos de simetría	6
1.3. Aplicaciones del plano: simetría y giro	6
1.4. Aplicaciones biyectivas	8
1.5. Imagen	9
1.6. Composición de aplicaciones	11
1.7. Características de la composición de aplicaciones	13
1.8. Aplicación identidad	13
1.9. Aplicación inversa	14
1.10. Propiedades de la composición de aplicaciones biyectivas	15
2. Isometrías del plano.....	18
2.1. Concepto de isometría	18
2.2. Isometrías con tres o más puntos fijos no alineados	20
2.3. Isometrías con dos puntos fijos	21
2.4. Isometrías con un sólo punto fijo	22
2.5. Isometrías sin puntos fijos	23
2.6. Clasificación de isometrías del plano y del espacio	24
3. Simetría de figuras, cenefas y mosaicos.....	30
3.1. Grupo de simetría de una figura plana	30
3.2. Rosetones	42
3.3. Frisos y cenefas	44
3.4. Mosaicos	47
3.5. Mosaicos regulares y semirregulares	50
3.6. Mosaicos de M.C. Escher	51
3.7. Mosaicos de Penrose	52
Ejercicios de autoevaluación.....	55
Solucionario.....	58

1. Aplicaciones del plano

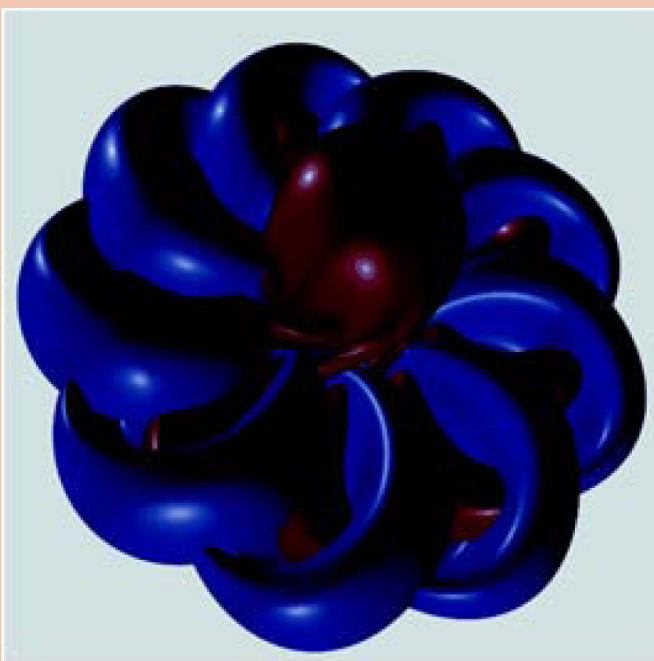
1.1. Introducción

El significado que se da a la palabra **simetría** en matemáticas no es exactamente el mismo que se le da en el lenguaje coloquial.

En general, la gente entiende que una figura es simétrica cuando su mitad izquierda es reflejo de su mitad derecha, aunque la mayoría de las personas asocia algún tipo de simetría a las aspas de un molino o de un ventilador que, sin embargo, no cumplen esta regla. A pesar de esto, la palabra *simetría* tiene un sentido más amplio en el lenguaje coloquial que en matemáticas: en matemáticas sólo se acepta la simetría cuando es perfecta.

La simetría ha jugado un papel muy importante en el diseño y en el arte a lo largo de la historia: en los mosaicos de la época romana, en la arquitectura árabe e hindú, en los rosetones de las iglesias católicas u ortodoxas, en las baldosas de un cuarto de baño, etc. encontramos distintas formas de simetría.

Cuando percibimos algún tipo de simetría en un objeto, esto se debe a que apreciamos en el mismo una cierta repetición armoniosa.



Esta figura ejemplifica una simetría basada en un patrón repetido.

1.2. Tipos de simetría

Podemos apreciar distintas formas de repetición, distintos tipos de simetría:

- Un patrón repetido varias veces.
- Un patrón repetido como si se reflejara en un espejo.
- Un patrón repetido como si fueran las aspas de un molino centrándose en un punto.

¿Quién no ha jugado nunca con un espejo?

¿Qué vemos al mirarnos en un espejo?

¿Por qué las ambulancias llevan las letras de la parte delantera escritas simétricamente?

¿Qué ocurre cuando juntamos dos espejos en una misma esquina formando un ángulo recto?

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar distintos tipos de simetría y qué posibilidades nos ofrece en el diseño.

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Podemos apreciar simetría en objetos muy variados: paredes, mosaicos, platos, tazas, carteles, tarjetas, etc. También en la naturaleza encontramos estas mismas simetrías: una fila de patos nadando, un reflejo en aguas tranquilas, los pétalos de una margarita, etc.

El uso de la simetría en el arte y el diseño llama la atención del público al crear efectos de gran belleza: en los logotipos de empresas, en los símbolos religiosos o de partidos políticos se puede observar el uso de la simetría con este fin.

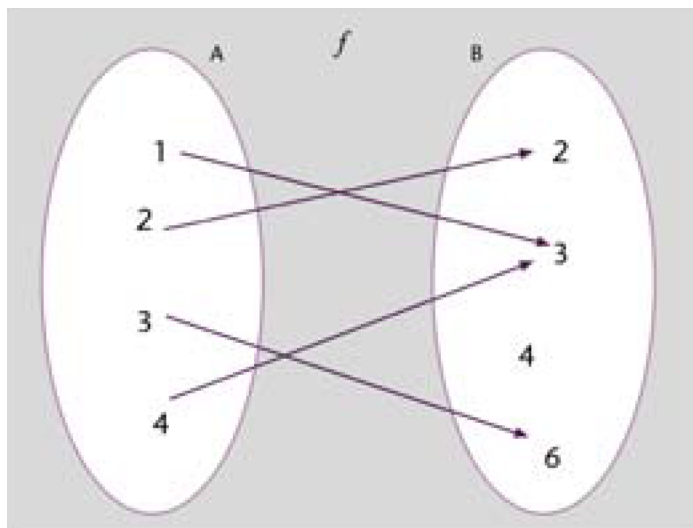
Muchos artistas (pintores, escultores, arquitectos, etc.) han usado la simetría en su obra, siguiéndola o rompiéndola, siempre con la intención de atraer la atención del público, de concentrar su atención sobre algún punto.

1.3. Aplicaciones del plano: simetría y giro

Antes de definir los conceptos de simetría, giro, etc., nos detendremos en el concepto de **aplicación** y en la notación más frecuente para referirnos al mismo.

Dados dos conjuntos A y B , denominaremos aplicación f de A en B una forma de asignar a cada elemento de A un elemento de B , y lo denotaremos como $f: A \rightarrow B$.

Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4,6\}$ y la aplicación definida por las asignaciones:



En este diagrama, las flechas relacionan cada elemento de A con su elemento correspondiente o asignado en B .

Si por medio de la aplicación f asignamos al elemento x de A el elemento y de B , decimos que y es la imagen de x por la aplicación f y lo escribimos así: $y = f(x)$. También se dice que x se transforma en y .

Podemos describir la aplicación f enumerando las asignaciones de la manera siguiente:

$$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 6, f(4) = 3.$$

Una aplicación suele venir dada por la lista de elementos y sus correspondientes imágenes, o por una regla o fórmula que permita calcular la imagen de cada elemento. Esta última forma es la más utilizada a causa de su brevedad; también es la que se utiliza para describir las aplicaciones que nos permitirán expresar el concepto de simetría de una manera más cómoda.

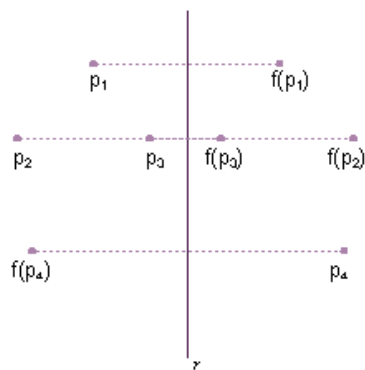
Sea A el conjunto de todos los puntos del plano. Sea B , también, el conjunto de todos los puntos del plano. Fijemos una recta en el plano que llamaremos r y consideremos la aplicación f definida por la regla siguiente:

$$f(p) = \text{punto simétrico del punto } p \text{ por la simetría respecto de la recta } r$$

Dicho de otro modo, la imagen de un punto p es el punto que está situado simétricamente al otro lado de la recta. Es decir, a la misma distancia y en dirección perpendicular.

Así, obtenemos:

Aplicación que asigna a cada punto del plano su simétrico respecto a la recta r



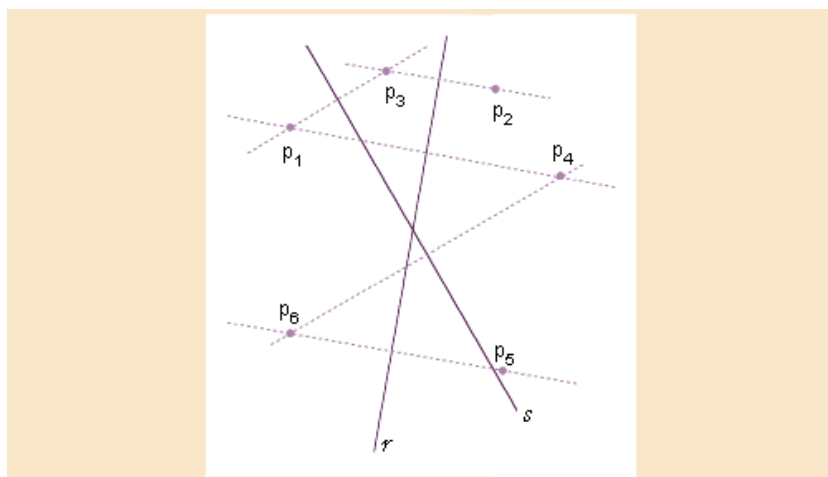
Esta aplicación la denominamos **simetría axial de eje r** o, simplemente, simetría determinada por la recta r .

Los nombres que se suelen utilizar para las aplicaciones son f , g , h etc. A veces también se utilizan subíndices. Por ejemplo, la simetría axial de eje r se suele denotar mediante S_r .

Actividad

Ejercicio 1

Consideremos las rectas r, s , las simetrías axiales S_r, S_s y los puntos $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ colocados según el dibujo:



- Calculad $S_r(p_1), S_s(p_1), S_r(p_2), S_r(p_3)$
- Calculad $S_r(S_s(p_1)), S_s(S_r(p_1))$
- De las igualdades siguientes, indicad cuáles son falsas y cuáles son ciertas: $S_r(p_1) = p_4, S_r(p_3) = p_1$

Observando el dibujo $S_r(p_1) = p_4$, $S_s(p_1) = p_3$, $S_r(p_2) = p_3$, $S_r(p_3) = p_2$.

Calculemos en primer lugar $S_s(p_1) = p_3$ y, por tanto, $S_r(S_s(p_1)) = S_r(p_3) = p_2$. De la misma manera calculamos $S_r(p_1) = p_4$ y, por tanto, $S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_6$.

La primera igualdad $S_r(p_1) = p_4$ es cierta observando el dibujo. La segunda igualdad es falsa, ya que $S_r(p_3) = p_2$.

Ejercicio 2

- Calculad $S_s(p_6), S_r(p_6), S_r(p_5)$
- Calculad $S_r(S_r(p_3)), S_s(S_s(p_3)), S_s(S_r(p_3))$
- De las igualdades siguientes, indicad cuáles son falsas y cuáles son ciertas: $S_s(p_1) = p_3, S_r(p_1) = p_3, S_r(p_3) = S_s(p_6)$

1.4. Aplicaciones biyectivas

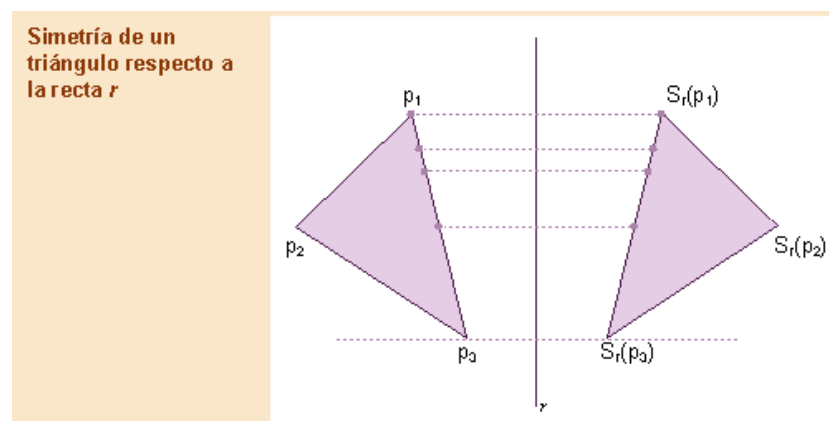
De entre las aplicaciones destacan las llamadas **aplicaciones biyectivas**, en las que todo elemento del conjunto B es imagen de un elemento de A , y de sólo uno. A partir de ahora sólo consideraremos aplicaciones biyectivas.

La aplicación definida en el primer ejemplo del apartado "Aplicaciones del plano: simetría y giro" no es biyectiva, ya que no verifica que todo elemento del conjunto B sea imagen de un elemento de A y de sólo uno. Solamente es necesario fijarse en el elemento 3 de B que es imagen de los elementos 1 y 4 del conjunto A . En el caso de la aplicación definida en el segundo ejemplo del apartado "Aplicaciones del plano: simetría y giro", es decir, una simetría respecto de la recta r , se trata de una aplicación biyectiva, ya que todo punto del plano es el simétrico de un solo punto en el otro lado de la recta r .

1.5. Imagen

Con una aplicación también podemos calcular la imagen de un subconjunto de A como la colección de las imágenes de los elementos del subconjunto, obteniendo otro subconjunto de B . También se dice que la aplicación transforma un subconjunto en su imagen. A menudo denominaremos objeto o dibujo un subconjunto del plano o del espacio.

En el caso de una simetría, la imagen del subconjunto es la llamada **imagen reflejada**, ya que se puede entender como la imagen especular que se obtiene por un espejo situado en la recta r . Consideremos, por ejemplo, la imagen de los puntos de un triángulo:

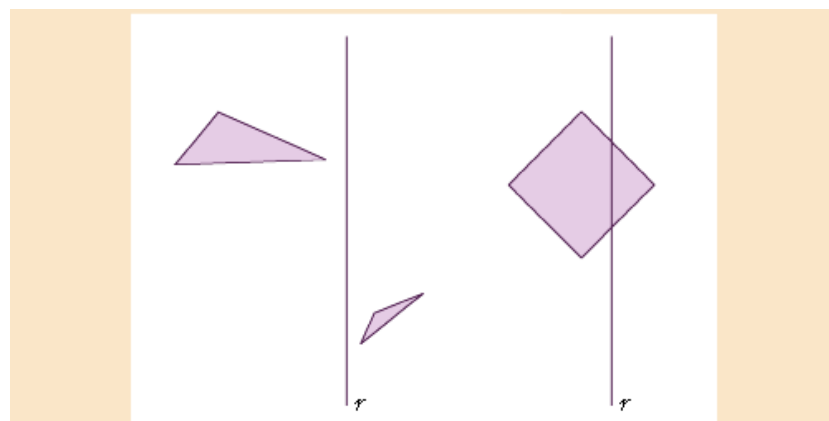


Se trata de un nuevo triángulo reflejado con la ayuda de la recta r como si se tratara de un espejo. Un método fácil para obtener la imagen reflejada es tener el triángulo y la recta dibujados en un papel, doblar el papel por la recta r y, a continuación, en una ventana al trasluz, reseguir la imagen que se transparenta.

Actividad

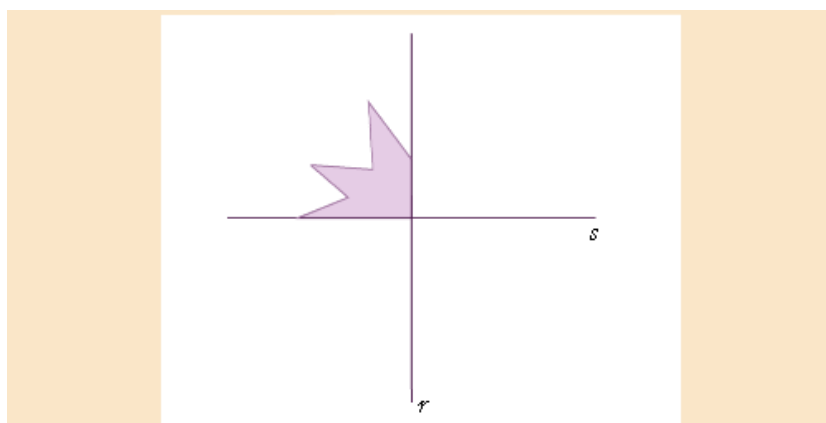
Ejercicio 1

Encontrad las imágenes por la simetría S_r de los objetos (subconjuntos del plano) indicados en cada dibujo:



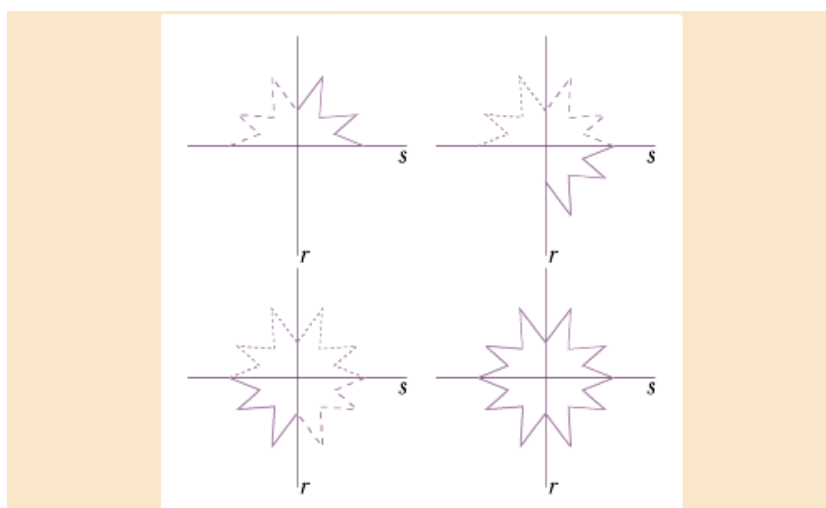
Ejercicio 2

Encontrar la imagen por la simetría S_r de la figura. A continuación, encontrad la imagen de este nuevo conjunto por la simetría S_s . Repetid la misma operación con el último conjunto, pero ahora con la simetría S_r . Acabad haciendo el mismo proceso, pero con S_s .



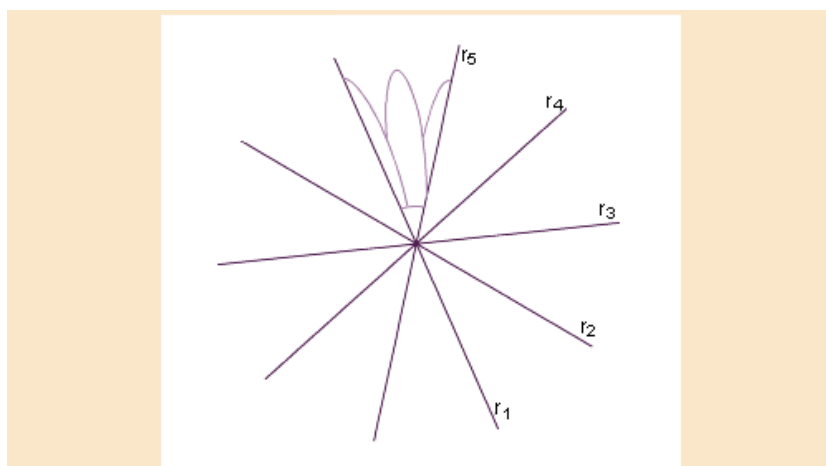
Solución

Las imágenes que vamos obteniendo se detallan a continuación:



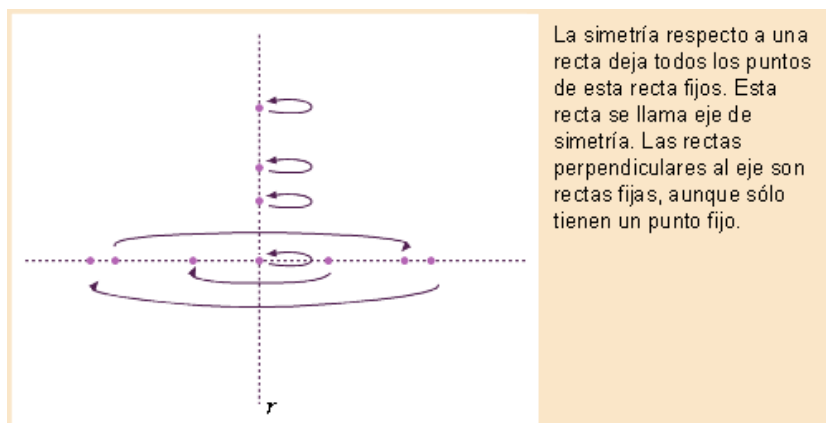
Ejercicio 3

Encontrad, siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior, las imágenes sucesivas por las simetrías S_{r_1} , S_{r_2} , S_{r_3} , S_{r_4} , S_{r_5} del objeto (subconjunto del plano) siguiente:



En el caso de que los conjuntos A y B sean iguales, como es el caso de las simetrías, a veces se da un fenómeno curioso y útil: el fenómeno de la existencia de los elementos fijos. Se denomina un **punto fijo** por f un punto tal que su imagen sea él mismo, esto es, el punto fijo p tiene que verificar $f(p) = p$. Este concepto también se puede extender a subconjuntos fijos: denominamos **subconjunto fijo** a aquel cuya imagen es él mismo.

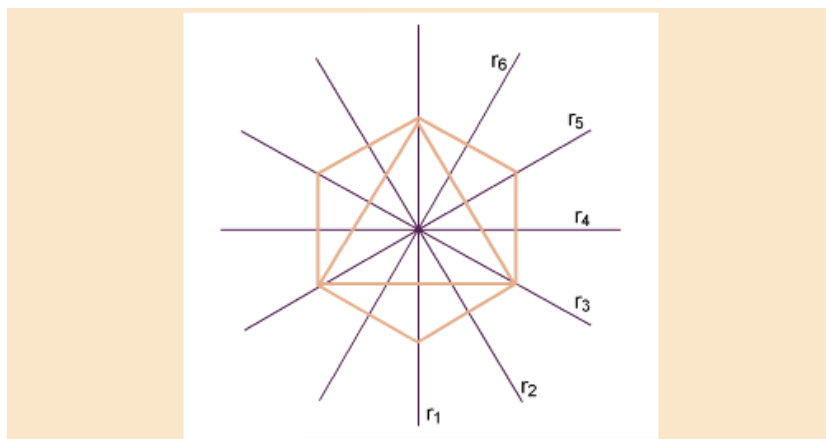
En el caso de una simetría S_r los únicos puntos fijos son los que forman la recta r . Si nos preguntamos cuáles son las rectas fijas, las respuestas son dos: la recta r y cualquier recta perpendicular a r . Observemos que una recta perpendicular es fija pero sólo tiene un punto fijo, a saber, el punto de intersección con la recta r . Todos los otros puntos tienen imágenes que se sitúan al otro lado de la recta r .



Actividad

Ejercicio

Dado el subconjunto del plano (en color crema):



¿Por cuáles de las siguientes aplicaciones resulta fijo?

$$S_{r_1}, S_{r_2}, S_{r_3}, S_{r_4}, S_{r_5}, S_{r_6}$$

1.6. Composición de aplicaciones

En los ejemplos propuestos parece útil la iteración en el cálculo de imágenes a la hora de generar objetos muy simétricos. Esta iteración en la acción de calcular imágenes por una aplicación recibe el nombre de **composición de apli-**

caciones. Dadas dos aplicaciones f y g definidas del conjunto A en sí mismo, llamaremos composición de g con f la nueva aplicación $f \circ g$ definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Esta concatenación de aplicaciones se suele escribir con una notación más gráfica de la manera siguiente:

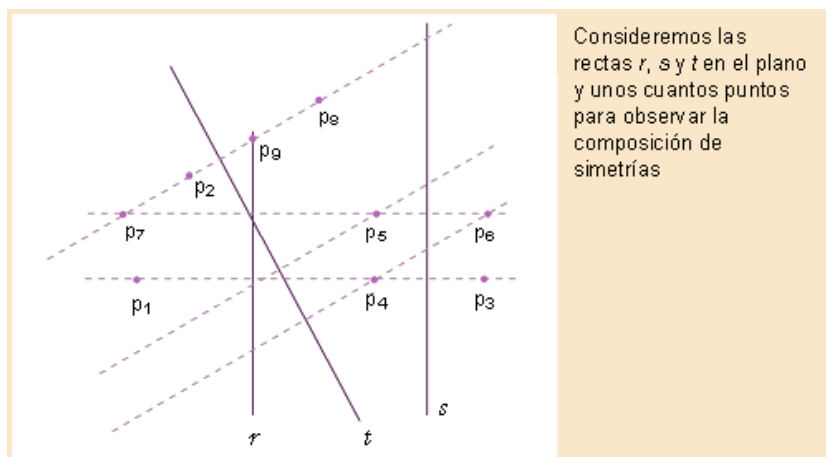
$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo 1

Calculemos las imágenes indicadas por las composiciones

$$(S_s \circ S_r)(p_1), (S_s \circ S_r)(p_7), (S_r \circ S_t)(p_8), (S_r \circ S_t)(p_2), (S_r \circ S_s)(p_6)$$

estando las simetrías S_r, S_s, S_t definidas por:



Para calcular la primera de estas imágenes, aplicaremos la definición de **composición**: $(S_s \circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1))$. En segundo lugar, puesto que $S_r(p_1) = p_4$, podemos reducir nuestro cálculo a: $(S_s \circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_3$, usando la aseveración de que la imagen del punto p_4 por la simetría S_s es p_3 . Fijémonos en que se trata de concatenar una simetría después de otra: primero hacemos el simétrico con la simetría S_r y después con la simetría S_s . Esta composición también se puede escribir así:

$$p_1 \xrightarrow{S_r} p_4 \xrightarrow{S_s} p_3$$

Para el resto de las imágenes se procede de la forma idéntica:

$$(S_s \circ S_r)(p_7) = S_s(S_r(p_7)) = S_s(p_5) = p_6$$

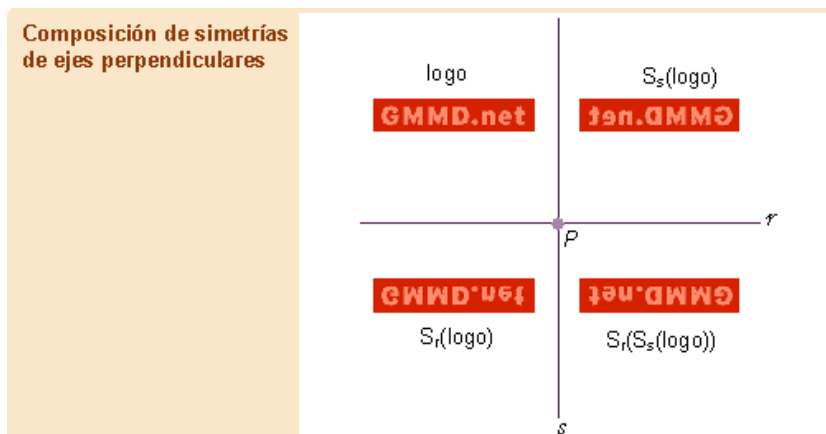
$$(S_r \circ S_t)(p_8) = S_r(S_t(p_8)) = S_r(p_7) = p_5$$

$$(S_r \circ S_t)(p_2) = S_r(S_t(p_2)) = S_r(p_9) = p_9$$

$$(S_r \circ S_s)(p_6) = S_r(S_s(p_6)) = S_r(p_5) = p_7$$

Ejemplo 2

También podemos generar las imágenes de objetos por composiciones de aplicaciones. En esta figura se pueden observar los objetos que se obtienen al realizar imágenes por las simetrías de rectas r y s :



En este ejemplo se ha colocado el logotipo de GMMD en la parte superior izquierda, y se le ha aplicado la simetría respecto de la recta s , y después respecto de la recta r . La imagen inferior izquierda se puede obtener de dos maneras: simplemente aplicando al logo original la simetría respecto de la recta r , o bien con la composición de tres simetrías: simetría respecto a la recta s , simetría respecto a la recta r y simetría respecto de la recta s .

1.7. Características de la composición de aplicaciones

Así, la composición de aplicaciones es una herramienta para fabricar nuevas aplicaciones. Por ejemplo, se puede observar en el ejemplo anterior que la composición $S_r \circ S_s$ nos proporciona un movimiento de las figuras que las gira 180° en torno al punto P . Un giro de 180° también se denomina **simetría central**, ya que se puede considerar como una simetría respecto de un punto, es decir, la imagen de un punto A se obtiene como el punto $S(A)$ al otro lado del punto P , tal que A , $S(A)$ y P están alineados, y la distancia entre $S(A)$ y P es la misma que la distancia entre A y P . El ejemplo anterior sería una simetría central respecto del punto P .

Otro hecho importante sobre la composición de aplicaciones es que no es conmutativa, es decir, no siempre se obtiene el mismo resultado si se componen $g \circ f$ o $f \circ g$. Por ejemplo, se puede observar en el primer ejercicio del subapartado "Aplicaciones del plano: simetría y giro" que $S_r \circ S_s \neq S_s \circ S_r$ ya que las imágenes de p_1 son diferentes (y si fueran la misma aplicación, deberían tener las mismas imágenes para originales iguales):

$$(S_r \circ S_s)(p_1) = S_r(S_s(p_1)) = S_r(p_3) = p_2$$

$$(S_s \circ S_r)(p_1) = S_s(S_r(p_1)) = S_s(p_4) = p_6$$

1.8. Aplicación identidad

Dentro de la clase de las aplicaciones biyectivas, tenemos una privilegiada que se denomina la **aplicación identidad** y que simbolizaremos con Id . Esta aplicación está definida de la forma siguiente: $Id(x) = x$, es decir, la imagen de un elemento es él mismo. Así, también la imagen de un objeto es él mismo. Podemos observar que si realizamos la composición $S_r \circ S_r$ para cualquier simetría,

obtendremos la aplicación identidad, esto es, $S_r \circ S_r = Id$. La razón es obvia: si hallamos la imagen de un punto por una simetría al volver a encontrar su imagen por la misma simetría, retornamos al punto inicial, es decir, al final la imagen de cada punto es él mismo.

La aplicación identidad verifica una propiedad fundamental con cualquier aplicación f biyectiva:

$$f \circ Id = Id \circ f = f$$

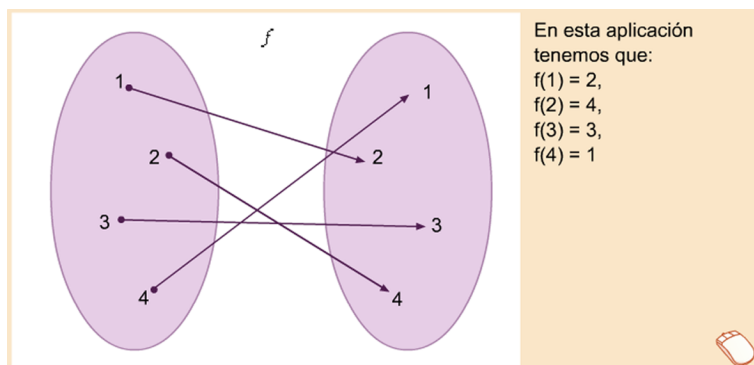
Es decir, el efecto de componer con la aplicación identidad es nulo, razón por la que se denomina **elemento neutro de la composición**.

1.9. Aplicación inversa

Para una aplicación biyectiva f tenemos definida la **aplicación inversa** f^{-1} de la manera siguiente: si $x \xrightarrow{f} y$ entonces $y \xrightarrow{f^{-1}} x$. Simplificando, muchas veces se dice que es la aplicación que intercambia el papel de imagen por el de original y original por imagen. Es decir, es aquella que asigna a un elemento el elemento del que sería imagen por la aplicación f .

Ejemplo 1

La aplicación inversa se obtiene simplemente girando las flechas de la aplicación:



Ejemplo 2

La aplicación inversa de una simetría S_r es ella misma, ya que si para un punto dado nos preguntamos de qué punto sería imagen por la simetría S_r , la respuesta es de su simétrico por la recta r .

Una de las propiedades principales que verifica la aplicación inversa es la siguiente:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id,$$

lo que resulta evidente, ya que al hacer la composición de una aplicación f que asigna $x \xrightarrow{f} y$ con otra f^{-1} que asigna $y \xrightarrow{f^{-1}} x$ obtenemos $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x$, es decir, que cada elemento x tiene por imagen el mismo elemento x por la composición de aplicaciones $f^{-1} \circ f$. De la misma forma ocurre que $y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y$, es decir, que $f \circ f^{-1} = Id$.

1.10. Propiedades de la composición de aplicaciones biyectivas

Resumamos las propiedades que verifica la composición de aplicaciones biyectivas. La composición de aplicaciones biyectivas definidas en un conjunto nos proporciona una nueva aplicación biyectiva, de modo que se verifican los siguientes elementos:

Asociativa	Para cualesquiera aplicaciones biyectivas f, g, h tenemos que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
Existencia de elemento neutro	Existe la aplicación identidad Id , que verifica que $f \circ Id = Id \circ f = f$ para toda aplicación biyectiva f .
Existencia de aplicación inversa	Para toda aplicación biyectiva f existe su aplicación inversa f^{-1} , que verifica: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.

Una forma de resumir estas propiedades en una sola palabra es decir que el conjunto de las aplicaciones biyectivas con la operación composición es un **grupo**. La razón por la cual se denota a estas propiedades con un nombre especial es porque en muy diferentes situaciones se repite el hecho de tener un conjunto con una operación que verifique estas tres propiedades. La composición de aplicaciones no es conmutativa en general. Es decir, el orden en que se componen las aplicaciones proporciona resultados distintos: $f \circ g \neq g \circ f$.

Grupo

Cuando tenemos un conjunto G con una operación " $\circ$ " que permite operar dos elementos cualesquiera de G , de modo que se obtiene otro elemento de G y que verifica las propiedades:

- **asociativa**: para cualesquiera elementos a, b, c de G tenemos que $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **existencia de elemento neutro**: existe un elemento e de G que verifica $a \circ e = e \circ a = a$ para todo elemento a de G ;
- **existencia de elemento inverso**: para todo elemento a de G existe su inverso a^{-1} , que verifica: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Cuando pretendemos operar con tres elementos, se puede hacer la operación $a \circ b$ y después, proceder a utilizar este resultado para calcular $(a \circ b) \circ c$, o bien se puede calcular $b \circ c$ y después operar obteniendo $a \circ (b \circ c)$. Se observa que la propiedad asociativa nos afirma que de las dos formas, el resultado es el mismo. Es decir, la propiedad asociativa proporciona la forma de entender la operación de tres elementos sin ninguna ambigüedad ni incorrección.

En algunos grupos se verifica que el orden en que se operan los elementos no altera el resultado, esto es, se verifica la propiedad:

conmutativa: para cualesquiera elementos a, b de G tenemos que $a \circ b = b \circ a$;

En este caso, se dice que el grupo es conmutativo o abeliano.

El grupo de las aplicaciones biyectivas con la composición de aplicaciones no es conmutativo porque, en general, no se verifica la propiedad conmutativa.

Ejemplo

Ejemplo 1

El conjunto de los números reales con la suma es un **grupo conmutativo**:

- **asociativa**: para cualesquiera números reales a, b, c , tenemos que $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- **existencia de elemento neutro**: existe el número real 0 que verifica que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo número real a ;
- **existencia de elemento inverso**: para todo número real a existe su opuesto $-a$ que verifica: $a + (-a) = -a + a = 0$.

Además, se trata de una operación conmutativa, esto es, para todo par de números reales a, b tenemos $a + b = b + a$.

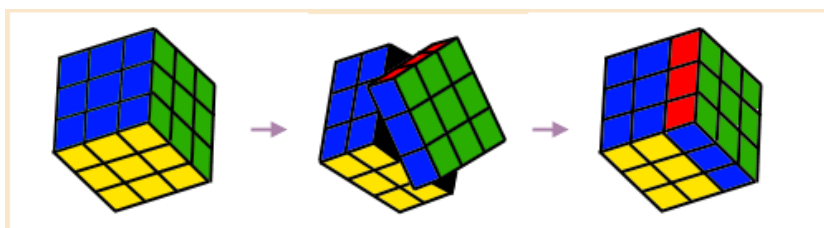
Ejemplo 2

El conjunto de los números naturales con la suma no es un grupo, ya que no existe elemento opuesto para todos los números naturales: por ejemplo, el opuesto de 2 es el -2 , que no es un número natural.

Ejercicio

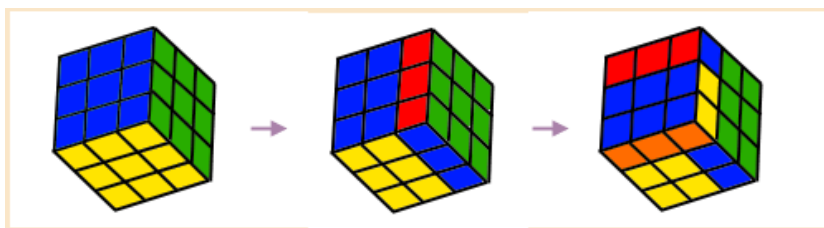
El mecanismo del cubo de Rubik permite realizar una serie de movimientos que son composición de unos cuantos movimientos elementales. Para fijar ideas, supongamos que tenemos el cubo inicial (el que tiene cada cara de un solo color) y que giramos la cara de color verde 90° en sentido antihorario. Si no lo tenéis en esa posición, desmontad el cubo con cuidado y volved a montarlo en la posición correcta. Para los que no quieran arriesgar el cubo o para los que no tengan uno, pueden hacerlo con uno de los cubos virtuales que se pueden encontrar en Internet. Podéis encontrar uno en <http://www.javaonthebrain.com/java/rubik/>.

Si realizáis el movimiento indicado obtendréis:



Llamemos este movimiento V .

Cuando se mueve una cara, se hace una permutación de las piezas que forman el cubo. Los movimientos se pueden concatenar (diremos *componer*) unos detrás de otros. Por ejemplo, si primero giramos la cara verde y después la azul (movimiento A), obtenemos:



Estas operaciones sobre el cubo inicial las representaremos como AV , siguiendo la misma notación de la composición de aplicaciones. El conjunto de los movimientos diferentes que se pueden hacer con el cubo de Rubik se denomina **grupo del cubo de Rubik**. Este grupo tiene:

43.252.003.227.489.856.000

elementos que se obtienen como composición de los movimientos elementales V (girar 90° en sentido antihorario la cara verde), A (girar 90° en sentido antihorario la cara azul), Y (girar 90° en sentido antihorario la cara amarilla), R (girar 90° en sentido antihorario la cara roja), N (girar 90° en sentido antihorario la cara naranja), B (girar 90° en sentido antihorario la cara blanca). Así, por ejemplo, girar la cara amarilla 180° es lo mismo que hacer Y dos veces seguidas, que escribiremos en forma de potencia:

$$YY = Y^2$$

Hay que pensar que no obtenemos infinitos movimientos, ya que, por ejemplo si hacemos Y^4 es como si no hiciéramos nada al cubo, es decir nos da el movimiento identidad, es decir, $Y^4 = Id$.

Se puede ver que este grupo no es conmutativo realizando la composición del movimiento de dos caras que comparten una arista. Por ejemplo, veamos que $VA \neq AV$, ya que el resultado final es diferente:



Por tanto, nos encontramos ante un grupo no conmutativo.

Se llama **resolver el cubo de Rubik** a devolver el cubo a su posición original a partir de una posición cualquiera del mismo. En términos de grupos, podemos decir que si el cubo ha sido desordenado por el movimiento M (composición de movimientos de caras), resolver el cubo es aplicar el movimiento inverso M^{-1} , que volverá el cubo a su posición original. Por ejemplo, comprobad experimentalmente que:

a) $(VA)^{-1} = A^{-1}V^{-1}$, es decir, comprobad que si se ha aplicado VA al cubo, entonces la acción $A^{-1}V^{-1}$ lo resuelve.

b) $(AY)^{-1} = Y^{-1}A^{-1}$.

c) $(Y^2)^{-1} = Y^2$.

d) Comprobad que $(AV)^{-1} = V^{-1}A^{-1}$.

Aplicad el movimiento AY al cubo. Volved a aplicarlo, con lo que habréis calculado $(AY)^2$. Repetid la operación hasta que se vuelva a la posición original del cubo (es decir, se ha buscado el número n tal que $(AY)^n = Id$).

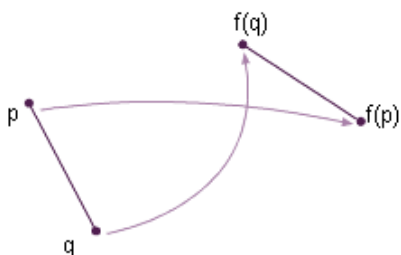
2. Isometrías del plano

2.1. Concepto de isometría

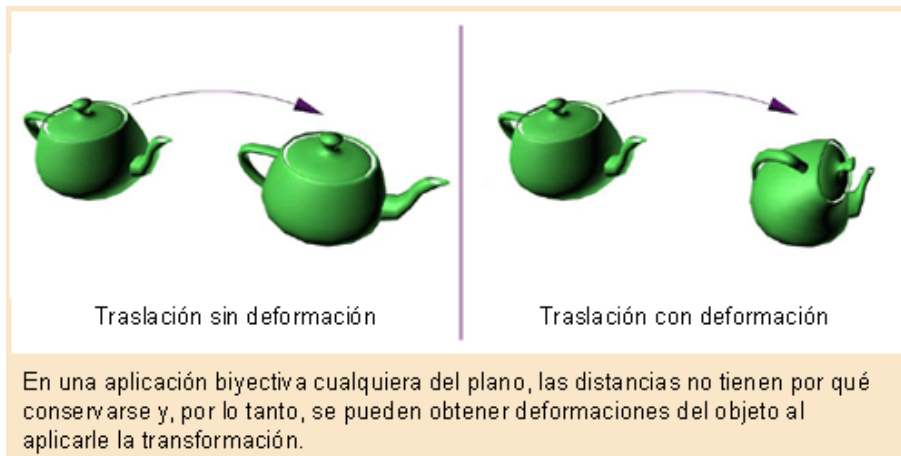
Para estudiar las simetrías de un objeto del plano, hemos definido qué entendemos por una aplicación biyectiva y los principales conceptos asociados a ésta. Ahora nos centraremos en unas aplicaciones biyectivas del plano que nos ayudarán a generar figuras y a estudiar las simetrías de que gozan. Ya hemos introducido una de éstas, la simetría definida a partir de una recta. También como composición de dos simetrías de ejes perpendiculares hemos obtenido un giro de 180° . Estas dos aplicaciones tienen en común una propiedad muy importante que adoptaremos como deseable en nuestro marco de estudio: no deforman los objetos, solo los cambian de posición.

Matemáticamente, denominaremos **isometría** toda aplicación biyectiva del plano que conserve las distancias, esto es, que la distancia entre dos puntos y la distancia entre sus respectivas imágenes siempre sea la misma.

Isometría



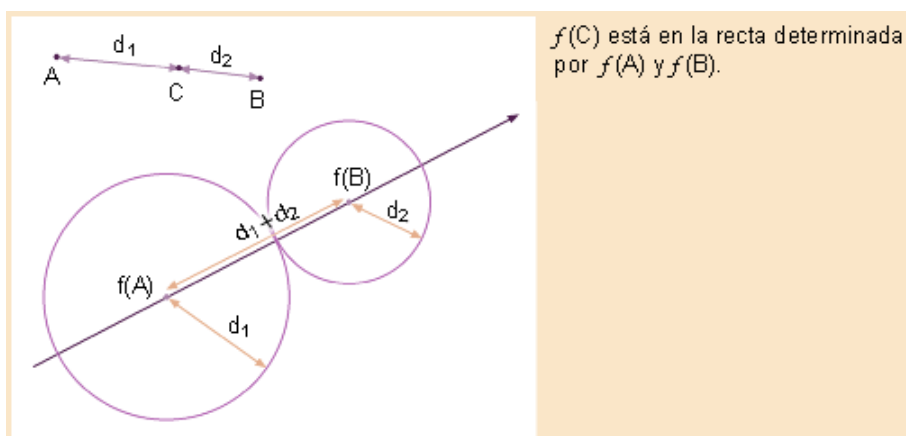
Observemos cuál es el efecto de la aplicación de una isometría sobre un objeto del plano: se cambia la posición del objeto sin deformarlo. Es decir, siempre la distancia entre dos puntos p y q es la misma que entre sus imágenes $f(p)$ y $f(q)$.



Estas aplicaciones que no conservan las distancias también tienen su utilidad en diseño asistido por ordenador como fuente de nuevas formas o modificación de formas preexistentes (entre éstas, destacan los *zooms*), pero ahora no nos ocuparemos de esta asunto.

Las isometrías también se utilizan en **animación por ordenador**. El movimiento de objetos se simula por medio de isometrías. También la posición de la cámara es recalculada en cada unidad de tiempo según una transformación que, en general, será una isometría.

Una propiedad importante de las isometrías es que la imagen de una recta es una recta. Esto es cierto, ya que si tenemos una recta determinada por dos puntos A y B y un punto C en la misma recta a distancia d_1 de A y a distancia d_2 de B , entonces la imagen $f(C)$ tiene que estar a distancia d_1 de $f(A)$ y a distancia d_2 de $f(B)$. Ahora bien, sólo existe un punto que se encuentre a estas distancias y se sitúe en la recta determinada por $f(A)$ y $f(B)$:

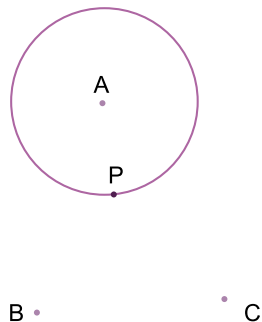


Ahora determinaremos las isometrías del plano; para conseguirlo, nos fijaremos en cuáles son sus puntos fijos.

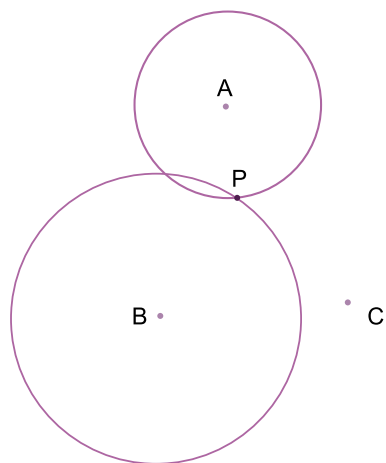
2.2. Isometrías con tres o más puntos fijos no alineados

Supongamos que tenemos tres puntos fijos no alineados A , B , C . Intentemos encontrar la imagen de un punto cualquiera P .

Como $f(A)$ y la distancia A y P tiene que ser la misma que entre $f(A)$ y $f(P)$, podemos afirmar que la imagen del punto P estará situada en la circunferencia de centro A que pasa por P .

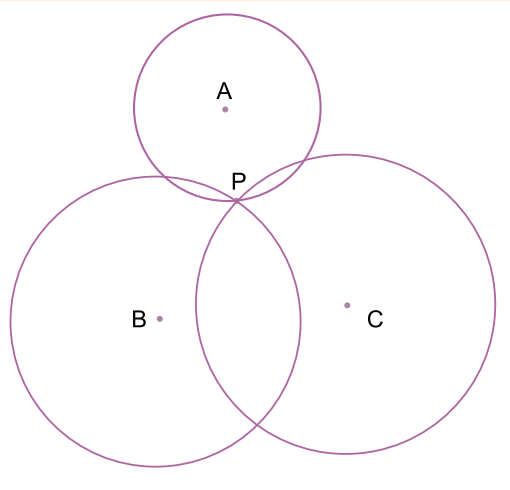


Procediendo de la misma forma con el punto B , tendremos que la imagen del punto P deberá estar situada en la circunferencia de centro B que pasa por P .



Estas dos circunferencias se cortan, como máximo, en dos puntos, uno de los cuales tiene que ser la imagen del punto P .

Si repetimos el mismo razonamiento con el punto C obtenemos una tercera circunferencia que corta las dos anteriores sólo en el punto P.

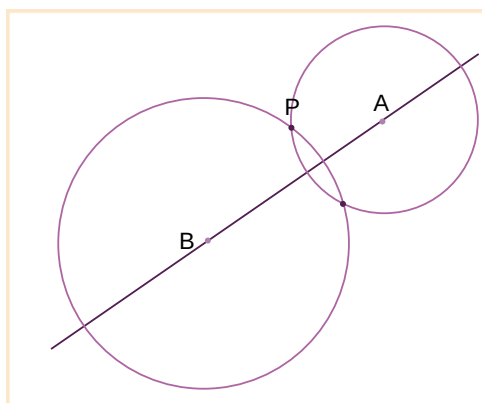


Por tanto, éste es el único punto que puede ser la imagen, es decir, $f(P) = P$. Este razonamiento sirve para cualquier punto P del plano, así todos los puntos del plano son fijos y, por tanto, esta isometría deberá ser la **identidad**.

Resumiendo, toda isometría con un mínimo de tres puntos fijos no alineados es la identidad.

2.3. Isometrías con dos puntos fijos

Sean A y B dos puntos fijos. Sea P un punto cualquiera exterior a la recta determinada por estos dos puntos fijos. La imagen de P tiene que mantener la distancia con el punto A y con el punto B . Hay dos puntos que mantienen estas distancias: el propio punto P y el punto simétrico respecto a la recta que forman los puntos A y B .

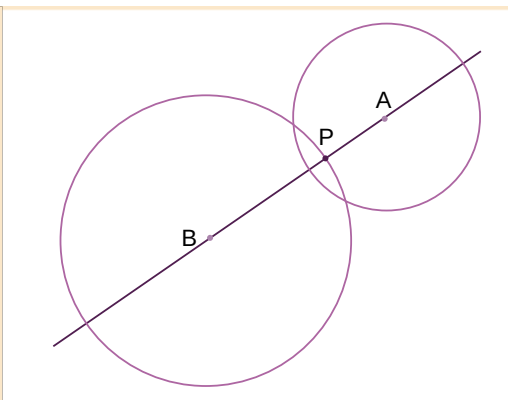


El punto P no puede ser ya que tendríamos tres puntos fijos no alineados, con lo que nos llevaría al mismo caso anterior.

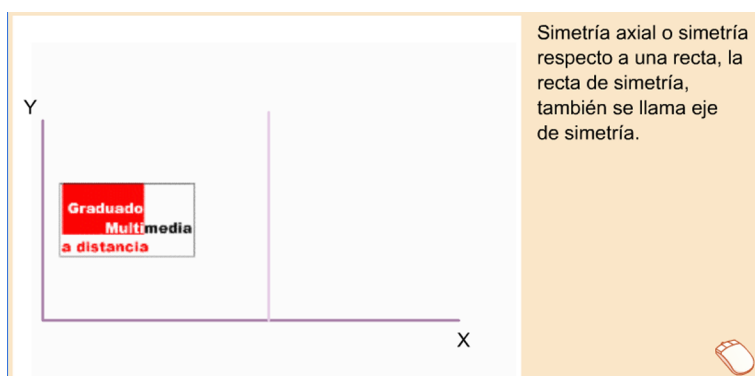
Por tanto la imagen tiene que ser el punto simétrico. Así pues, esta isometría es una **simetría axial** y su eje de simetría es la recta determinada por los dos puntos fijos.

Se observa que todos los puntos del eje de simetría son también fijos. Para verlo basta con tomar el punto P de la recta formada por los dos puntos fijos. Entonces razonando de forma análoga obtenemos dos circunferencias tangentes, y por tanto sólo se cortan en un punto.

El punto P será un punto fijo.



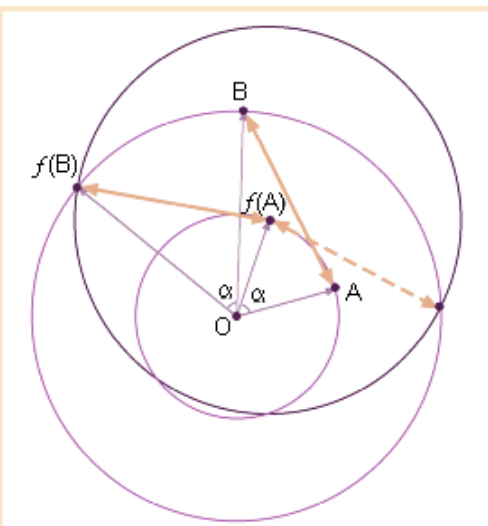
Podemos observar también que todas las rectas perpendiculares al eje de simetría serán rectas fijas ya que la imagen de la recta es la propia recta. No son rectas de puntos fijos.



2.4. Isometrías con un sólo punto fijo

Llamemos O al único punto fijo y consideremos un punto A cualquiera y su imagen $f(A)$, ésta deberá estar sobre la circunferencia centrada en O que pasa por A . Veamos qué posibilidades tenemos para la imagen de otro punto B . Al conservarse las distancias por la isometría, podemos afirmar que $f(B)$ se situará sobre la circunferencia centrada en O que pasa por B y, a su vez, deberá pertenecer a la circunferencia centrada en $f(A)$ de radio la distancia entre A y B . Estas dos circunferencias se cortarán en dos puntos, que serán las posibles imágenes del punto B . Si mantenemos la orientación del ángulo que forma cada uno de los puntos con el punto fijo y con su imagen, deberemos escoger la imagen de B , tal como muestra la figura.

Se puede comprobar que si se escoge el otro punto de intersección de las dos circunferencias, aparece una recta de puntos determinada por O y el punto medio de A y $f(A)$.



Esto nos lleva a una contradicción con la suposición de que la isometría sólo tiene un punto fijo.

Así pues, es fácil apreciar que llegamos a la isometría conocida como **giro** o **rotación**, siendo el punto fijo el centro de giro y α , el ángulo de giro. Este ángulo se obtiene simplemente con la imagen de un solo punto, siendo el ángulo formado por los puntos A , O y $f(A)$.

Los giros no mantienen ninguna recta fija, ya que los únicos objetos fijos son las circunferencias centradas en el centro de giro, excepto en el caso de que el ángulo de giro sea de 180° .

La imagen siguiente muestra con una animación un giro en el plano:

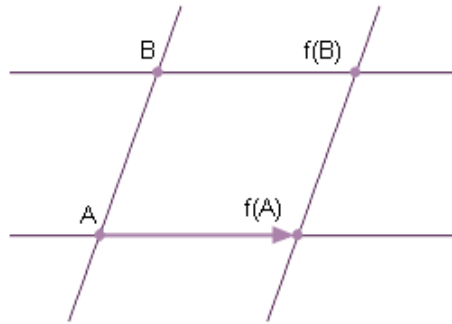
Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

WEB

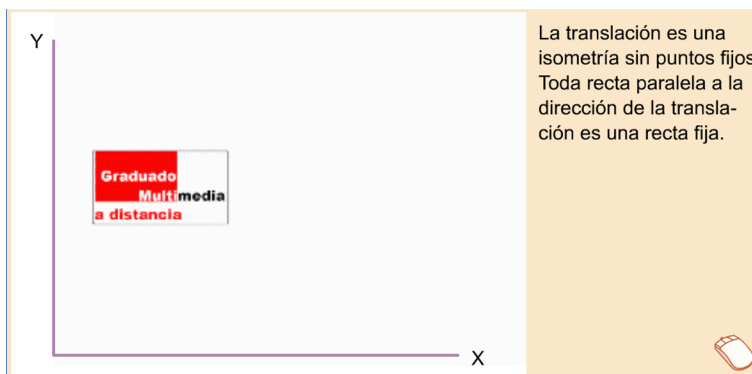
2.5. Isometrías sin puntos fijos

En este caso se puede deducir que las únicas isometrías del plano sin puntos fijos son las **traslaciones** y los **deslizamientos**. Empecemos describiendo una traslación. Dado un punto cualquiera A y su imagen $f(A)$, si la recta formada por estos dos puntos es una recta fija, ésta nos marcará una dirección y un sentido para la traslación.

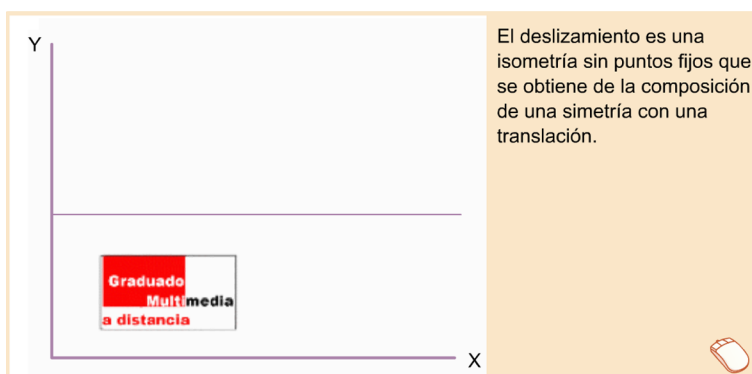
Para buscar la imagen de otro punto B, bastará con construir una recta paralela a esta dirección y, siguiendo el mismo sentido, señalar la imagen $f(B)$ como el punto que se encuentra de B a la misma distancia que se encuentran A y $f(A)$.



Para señalar la traslación de forma cómoda, utilizaremos **los vectores**. El vector de **origen** en A y **extremo** en $f(A)$ nos señalará la **dirección** y **sentido** de la traslación. Representaremos el vector mediante una flecha.



Claramente, toda composición de isometrías será una isometría. En el caso de componer una simetría con una traslación de vector paralelo al eje de simetría, se obtiene un movimiento llamado **deslizamiento**. Este movimiento será otra isometría sin puntos fijos.



2.6. Clasificación de isometrías del plano y del espacio

Con esto concluimos el estudio de todas las isometrías del plano, ya que todas las composiciones que se puedan realizar entre isometrías nos llevarán a alguna de las isometrías que hemos descrito hasta este momento.

Como ya hemos comentado, las traslaciones no tienen puntos fijos. Todas las rectas que siguen la misma dirección que el vector de la traslación son rectas fijas (pero no de puntos fijos).

Los deslizamientos tampoco tienen puntos fijos. Al ser una composición de una simetría con una traslación paralela al eje de simetría, el único elemento fijo es la recta de simetría. Esta recta es fija, aunque no de puntos fijos.

Resumiendo, podemos decir que, aparte de la introducción de isometrías útiles en el plano, acabamos de ver un resultado mucho más trascendente: toda isometría del plano es una de las descritas. Escribámoslo en forma de teorema:

Teorema: las únicas isometrías del plano son las traslaciones, los deslizamientos, los giros y las simetrías axiales.

Las simetrías axiales se pueden considerar como un caso particular de los deslizamientos tomando el vector de traslación como nulo. La identidad también se puede considerar como caso particular de una traslación de vector nulo o como un giro de ángulo 0° .

Las **isometrías en el espacio** se definen de la misma forma, es decir, son aplicaciones biyectivas que conservan las distancias. Se puede obtener un teorema equivalente al anterior para las isometrías en 3D. Las isometrías elementales con las que se construyen todas las isometrías del espacio son las traslaciones, los giros y las simetrías especulares. Hagamos una breve descripción de cada una.

Una **traslación en el espacio** se define de la misma forma que en el plano: todos los puntos se modifican desplazándose una distancia fijada en una misma dirección y sentido. Como se puede imaginar, la traslación es una de las isometrías más simples que se pueden utilizar en la animación por ordenador. Éste es el mismo caso que el que se da cuando en 3D Studio se mueve la cámara según una línea recta: cada secuencia de la imagen se obtiene moviendo la cámara según una traslación y recomponiendo la escena.

Un **giro en el espacio** en torno a una recta es el resultado de girar todos los puntos un cierto ángulo fijado en torno a la recta, a la que llamaremos **eje de giro**. Cada punto del espacio gira dentro del plano que lo contiene, que es perpendicular al eje del giro, de la misma forma que un giro en dos dimensiones.

Una **simetría especular**, o simetría respecto de un plano, transforma cada punto del espacio como si el plano fuera un espejo. Para determinar la imagen de un punto cualquiera, se debe considerar la recta perpendicular al plano que pasa por dicho punto. La imagen del punto se sitúa sobre esta recta a igual distancia del plano, aunque en el lado opuesto.

A partir de estos tres tipos de isometrías, podemos construir el resto por composición entre las mismas, de forma que podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema: las únicas isometrías del espacio son traslaciones, giros respecto a una recta, simetrías especulares y las composiciones entre todas éstas.

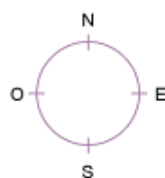
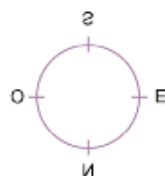


Una traducción de este teorema en términos de animación por ordenador en 3D nos indica que las únicas transformaciones que se pueden y se deben utilizar para simular animaciones son las traslaciones, los giros respecto a una recta, simetrías respecto a un plano y las composiciones entre todas éstas. Supongamos que queremos crear una animación en la que una tetera se mueve en el espacio. El objeto no debe deformarse, sólo moverse, para obtener un efecto más realista en la animación. Por consiguiente, las únicas transformaciones que se pueden utilizar son las traslaciones, los giros respecto a una recta, simetrías respecto a un plano y las composiciones entre todas éstas. Otro aspecto muy diferente se da cuando el programa de generación de imágenes nos muestra una vista frontal, lateral o en perspectiva para la que utiliza deformaciones que permitirán obtener el efecto tridimensional (más información en: <http://www.scienceu.com/library/articles/isometries/grail.html>).

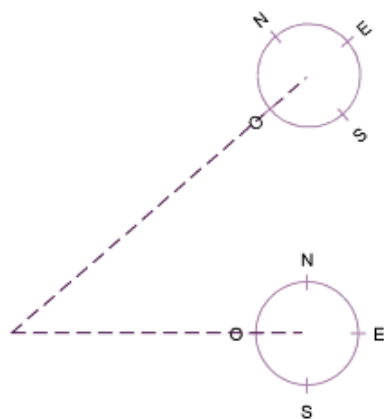
Por todo esto, las transformaciones sin deformaciones que ofrecen los menús de programas de tratamiento de imágenes en 3D son sólo las indicadas en el teorema.

Otra característica que se suele estudiar en las isometrías del plano es si conservan la orientación de los objetos o si la invierten. Lejos de hacer una definición formal de qué se entiende por conservar o invertir la orientación, observemos el efecto de las isometrías del plano sobre una rosa de los vientos simplificada.

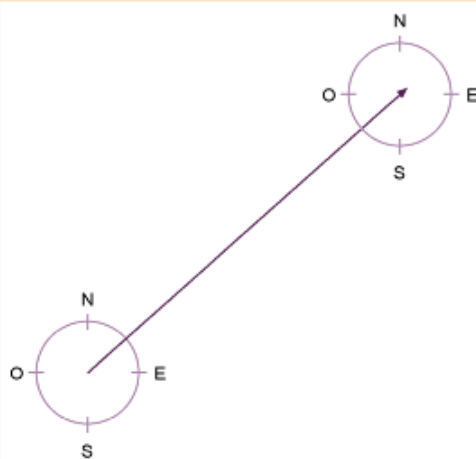
La simetría axial en el plano invierte la orientación de los objetos

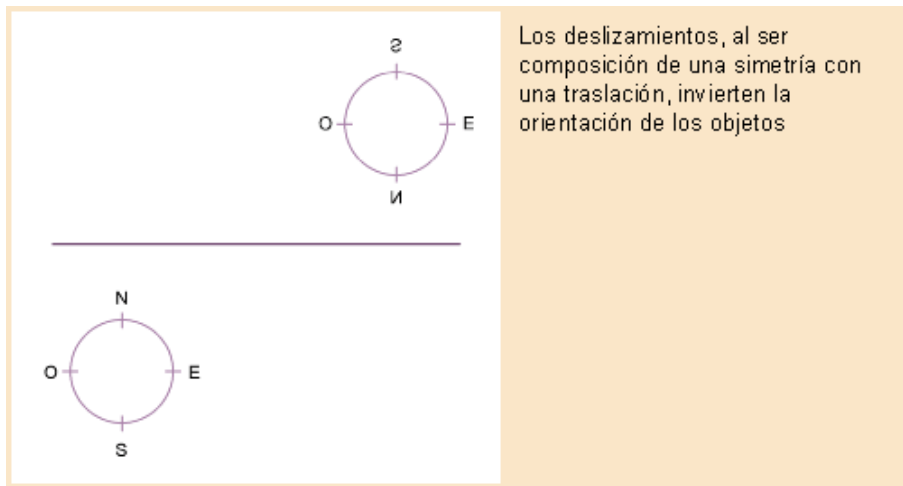


Los giros conservan la orientación



Las traslaciones también conservan la orientación de los objetos





Observamos que la orientación del objeto queda invertida por la acción de un deslizamiento y de una simetría axial, mientras que las otras isometrías mantienen la orientación. Igualmente, para las isometrías en el espacio se puede definir el concepto de conservación o inversión de la orientación.

Para las isometrías del plano podemos resumir en una tabla cuáles son los elementos fijos y si se trata de isometrías que invierten o conservan la orientación:

	Puntos fijos	Rectas fijas	Orientación
Simetría axial	Todo el eje de simetría	El eje de simetría (de puntos fijos) y todas las rectas perpendiculares al eje de simetría	Invierte
Giro	Uno (el centro)	Ninguna	Conserva
Traslación	Ninguno	Toda recta paralela a la dirección del vector traslación	Conserva
Deslizamiento	Ninguno	Toda recta paralela a la dirección del vector traslación	Invierte

La isometría identidad se puede considerar como un caso particular de cualquiera de las isometrías que conservan la orientación.

Ahora bien, si sólo existen estos cuatro tipos de isometrías en el plano, la composición de dos de éstas tiene que volver a darnos una de la familia. Veamos cómo se calcula la composición de dos simetrías. Al realizar una composición de dos simetrías, la orientación se invierte por la primera simetría pero es corregida por la segunda.

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Por tanto, consultando la tabla anterior, el resultado tiene que ser un giro o una traslación. También podemos observar que el resultado es uno u otro en función de si los ejes de las simetrías axiales son paralelos o no. En el caso de que se corten, el punto de corte de los dos ejes será un giro con centro, ya que será el único punto fijo por la composición.

Antes hemos descrito brevemente las isometrías en el espacio tridimensional. Al realizar composiciones entre las isometrías descritas, obtendremos otras isometrías que no hemos definido, como son la **simetría rotacional** (simetría seguida de un giro de eje perpendicular al plano de simetría) o el **movimiento helicoidal** (giro compuesto con traslación de vector paralelo al eje de giro).

Web complementaria

Más información en:
<http://www.scienceu.com/library/articles/isometries/closing.html>

3. Simetría de figuras, cenefas y mosaicos

3.1. Grupo de simetría de una figura plana

Como ya hemos comentado anteriormente, las isometrías se utilizan mucho en diseño de objetos en 3D, además de ser muy útiles para conferir movimientos a los objetos y a la cámara en una secuencia animada por ordenador. Sin embargo, no sólo se utilizan las isometrías en el diseño 3D. En el diseño gráfico más básico, a menudo se da un ritmo y un movimiento que le proporciona la utilización de un patrón y de la aplicación de diferentes isometrías; por ejemplo, la utilización del patrón creado por el diseñador M.C. Escher:

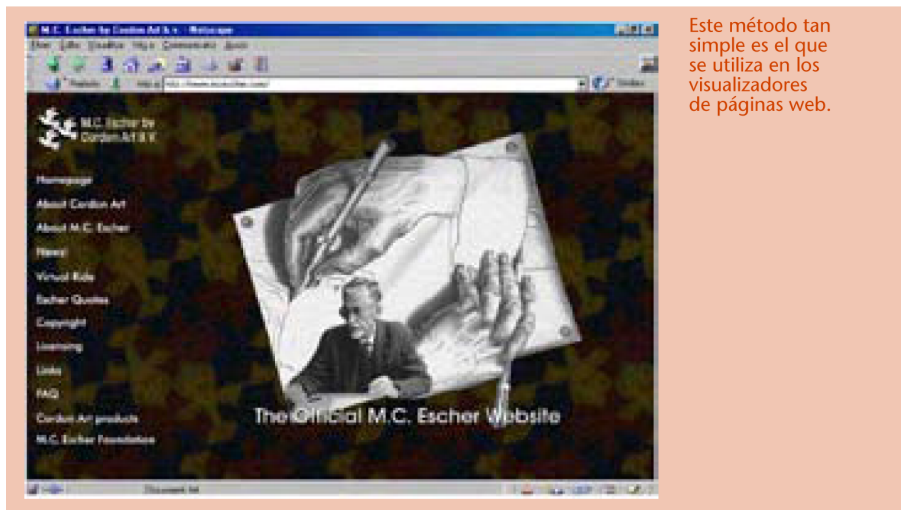


Patrón creado por M.C. Escher

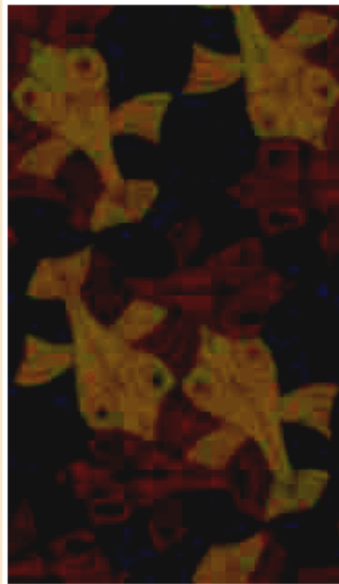
y su repetición por medio de una traslación produce el efecto siguiente:



Aquí juega también el diseño del propio patrón, que conecta perfectamente cada pieza.



Patrón utilizado en "The Official M.C. Escher Website"



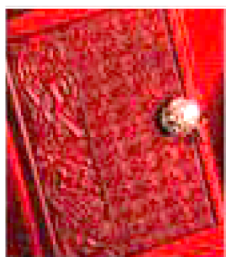
De hecho, se puede observar que el propio patrón está diseñado con una pieza elemental a la que se ha aplicado un desplazamiento. Puesto que el estándar que establece el lenguaje HTML es repetir el patrón a partir del margen superior izquierdo, sólo con dos traslaciones (una horizontal y una vertical), el diseñador se ha visto obligado a incluir en el patrón el propio motivo que hay que repetir con el patrón desplazado (dos veces), de modo que se ha obtenido un efecto de repetición con desplazamientos, cosa que no está contemplada en el estándar de definición del lenguaje HTML. En este caso, el diseñador también se ha visto obligado a recortar la figura para obtener un patrón rectangular, ya que es la forma de introducir imágenes como fondos en páginas web.

También cuando se quiere resaltar el efecto 3D de una representación plana de un objeto en tres dimensiones, se utilizan tramas y materiales contruidos por repetición de un patrón; eso sí, con unas técnicas más complicadas.



Un ejemplo es esta escena creada con 3D Studio de un tubo toroidal en su superficie con un mosaico.

Desde la antigüedad se han utilizado las isometrías estudiadas, de forma que se diseñan mosaicos repitiendo unos patrones, cenefas, etc. para decorar objetos.



Diseño inspirado en arte celta

Antes de estudiar este tipo de diseños de forma detallada, veremos que el grupo de simetría de una figura plana es la entidad matemática que nos indicará hasta qué punto es simétrica una figura y qué tipo de simetría tiene.

Ahora que hemos introducido la noción de isometría del plano, podemos definir el llamado **grupo de simetría de una figura** como la forma de medir y estudiar el grado de simetría de una figura. Llamaremos grupo de simetría de una figura el conjunto de las isometrías del plano que dejan fija la figura. Matemáticamente, para una figura F del plano (es decir, un subconjunto de puntos del plano), se puede escribir como:

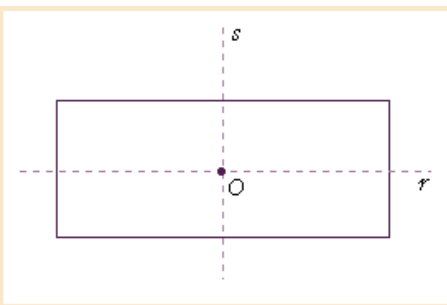
$$G_F = \{f \text{ isometría tal que } f(F) = F\}$$

Este simbolismo quiere decir que el conjunto de todas las isometrías del plano que dejan fija la figura F se denomina mediante G_F . Con la composición de isometrías se puede razonar que este conjunto es un grupo.

Ejemplo 1

Tenemos el rectángulo (no cuadrado):

Las isometrías del plano que dejan un rectángulo invariante son: la identidad, la simetría respecto a la recta r , la simetría respecto a la recta s y el giro de 180° respecto del punto O .



Comencemos por identificar qué isometrías dejan el rectángulo invariante. Esto lo podemos hacer simplemente consultando la lista de las únicas isometrías del plano. La identidad Id es la primera isometría que se debe considerar; a continuación, la simetría S_r de eje r , así como la simetría S_s . En cuanto a los giros, sólo tenemos $G_O^{180^\circ}$, el giro de 180° y centro O . Ahora discutiremos si la composición entre estas isometrías nos produce alguna que no hayamos tenido en cuenta. El resultado lo representaremos con una tabla de doble entrada:

$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
Id				
S_r				
S_s				
$G_O^{180^\circ}$				

Para rellenar la tabla de la composición seguiremos el convenio de que si f es una entrada horizontal y g una vertical, entonces en la casilla correspondiente se colocará $g \circ f$, es decir, se aplica primero la f y después la g . Parte de la tabla es muy fácil de rellenar, ya que sabemos que la aplicación identidad verifica $Id \circ f = f \circ Id = f$. Además, también sabemos que la composición de $S_r, S_s, G_O^{180^\circ}$ consigo mismas da la identidad. Así, ya podemos rellenar parte de la tabla:

$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
Id	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
S_r	S_r	Id		
S_s	S_s		Id	
$G_O^{180^\circ}$	$G_O^{180^\circ}$			Id

Para rellenar el resto de tabla de la composición observaremos que, en general, no será lo mismo la composición de dos isometrías en un orden que en el inverso. Así, si tenemos que componer la simetría S_s con la S_r obtenemos el giro $G_O^{180^\circ}$, que quedará reflejado en la tabla de la forma siguiente:

$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
Id	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
S_r	S_r	Id	$G_O^{180^\circ}$	

$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
S_s	S_s		Id	
$G_O^{180^\circ}$	$G_O^{180^\circ}$			Id

Si hacemos $G_O^{180^\circ}$ con la S_r obtenemos el giro S_s , y si hacemos S_r con la S_s , obtenemos el giro $G_O^{180^\circ}$:

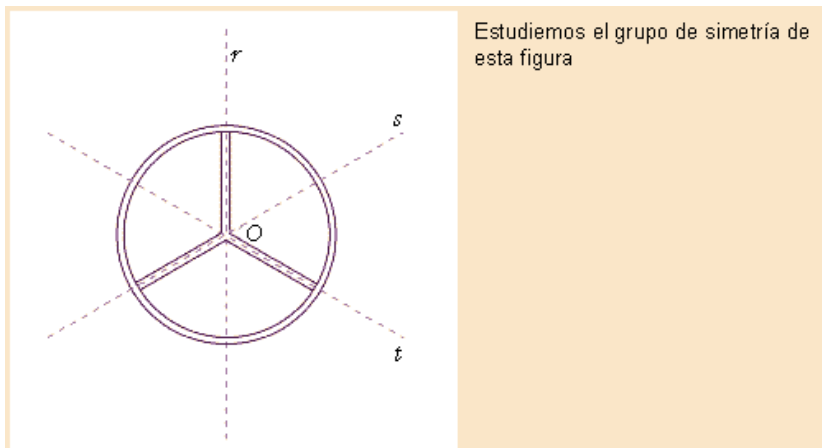
$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
Id	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
S_r	S_r	Id	$G_O^{180^\circ}$	S_s
S_s	S_s	$G_O^{180^\circ}$	Id	
$G_O^{180^\circ}$	$G_O^{180^\circ}$			Id

El resto de la tabla se obtiene haciendo las composiciones $S_s \circ G_O^{180^\circ} = S_r$, $G_O^{180^\circ} \circ S_r = S_s$, $G_O^{180^\circ} \circ S_s = S_r$, de modo que la tabla, finalmente, queda:

$\circ$	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
Id	Id	S_r	S_s	$G_O^{180^\circ}$
S_r	S_r	Id	$G_O^{180^\circ}$	S_s
S_s	S_s	$G_O^{180^\circ}$	Id	S_r
$G_O^{180^\circ}$	$G_O^{180^\circ}$	S_s	S_r	Id

Aunque hemos tomado tantas precauciones en el orden con el que hacíamos las operaciones, se observa que, en este caso, el grupo es conmutativo, es decir, que el orden en las composiciones no importa. Se puede comprobar rápidamente la conmutatividad observando la simetría de la matriz de las composiciones.

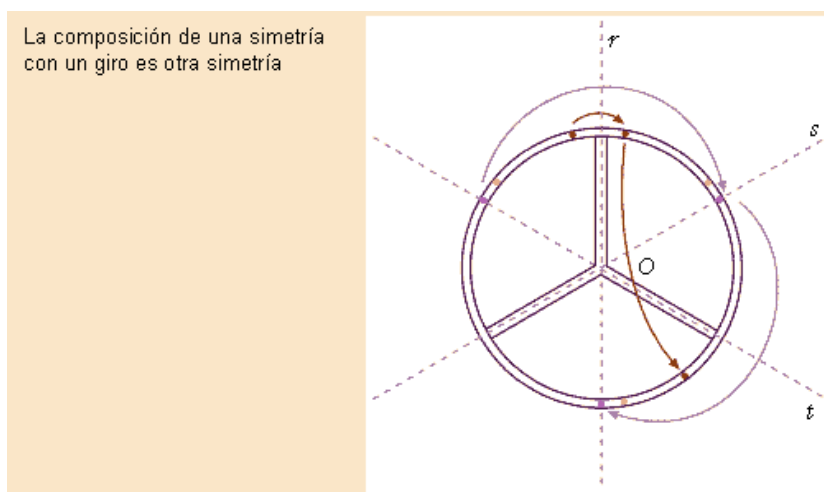
Ejemplo 2



Como en el ejemplo anterior, comencemos por identificar qué isometrías dejan la figura invariante. En este caso, son las tres simetrías de ejes las rectas r , s , t , aparte, claro está, de la aplicación identidad. En cuanto a giros, tenemos los giros $G_O^{120^\circ}$, $G_O^{240^\circ}$ de centro O y ángulo 120° y 240° , respectivamente. El cálculo de la tabla de composición nos permitirá ver si por composición nos hemos olvidado alguna isometría que deje la figura fija y que se obtenga por composición de las anteriores:

$\circ$	Id	S_r	S_s	S_t	$G_O^{120^\circ}$	$G_O^{240^\circ}$
Id	Id	S_r	S_s	S_t	$G_O^{120^\circ}$	$G_O^{240^\circ}$
S_r	S_r	Id	$G_O^{240^\circ}$	$G_O^{120^\circ}$	S_t	S_s
S_s	S_s	$G_O^{120^\circ}$	Id	$G_O^{120^\circ}$	S_r	S_t
S_t	S_t	$G_O^{240^\circ}$	$G_O^{240^\circ}$	Id	S_s	S_r
$G_O^{120^\circ}$	$G_O^{120^\circ}$	S_s	S_t	S_r	$G_O^{240^\circ}$	Id
$G_O^{240^\circ}$	$G_O^{240^\circ}$	S_t	S_r	S_s	Id	$G_O^{120^\circ}$

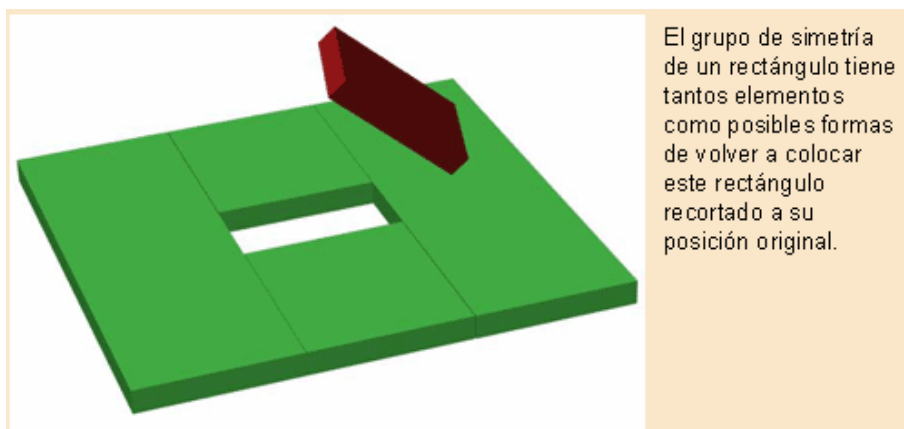
Veamos, por ejemplo, por qué $G_O^{120^\circ} \circ S_r = S_s$, obteniendo la imagen de unos puntos:



De la observación de la tabla se puede deducir cuál es la isometría inversa de cada elemento del grupo. De cada simetría, la inversa es ella misma y de los giros, uno es inverso del otro, esto es, $(G_0^{120^\circ})^{-1} = G_0^{240^\circ}$, $(G_0^{240^\circ})^{-1} = G_0^{120^\circ}$.

También se observa que el grupo no es conmutativo, ya que, por ejemplo, $S_r \circ S_s \neq S_s \circ S_r$.

Si pensamos la figura recortada en una matriz de cartón, el grupo de las isometrías nos proporciona las diferentes maneras de volver a encajar la figura en esta matriz.



Cuanto más simétrica sea la figura, más posibilidades tendremos de hacerlo. Por este motivo, cuanto mayor sea el grupo de simetría, más simétrica es la figura. Así, de los dos ejemplos expuestos de grupos de simetría de una figura, el segundo corresponde a una figura más simétrica que el primero. Se puede dar el caso extremo en que el grupo de simetría esté formado sólo por la isometría identidad, es decir, que a la figura no se le observa ninguna simetría. Éste es el caso, por ejemplo, de la letra A mayúscula de la fuente Kids:

Letra A mayúscula de la fuente Kids



Ejemplo 3

Algunas figuras planas pueden tener un grupo de simetría con infinitos movimientos. El caso más simple es el de un círculo o, de forma análoga, la siguiente figura, compuesta por unos círculos concéntricos. Esta figura queda fija por cualquier giro de centro de los círculos, sea cual sea el ángulo de giro. Además, cualquier simetría axial dejará esta figura fija si su eje pasa por el centro.

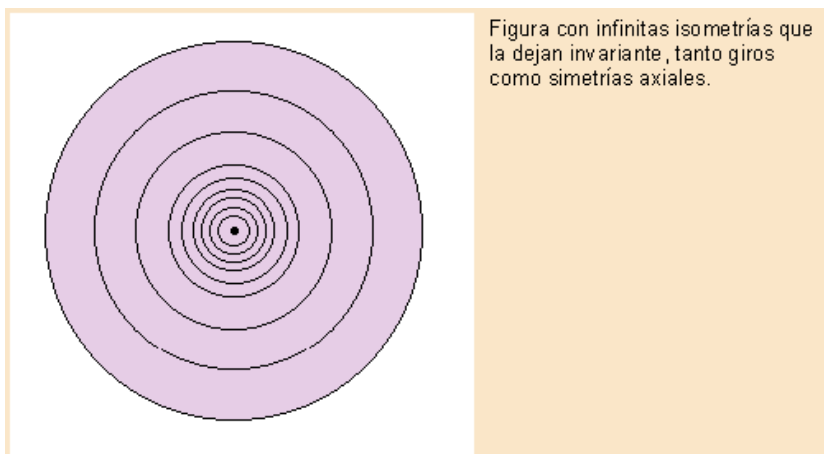
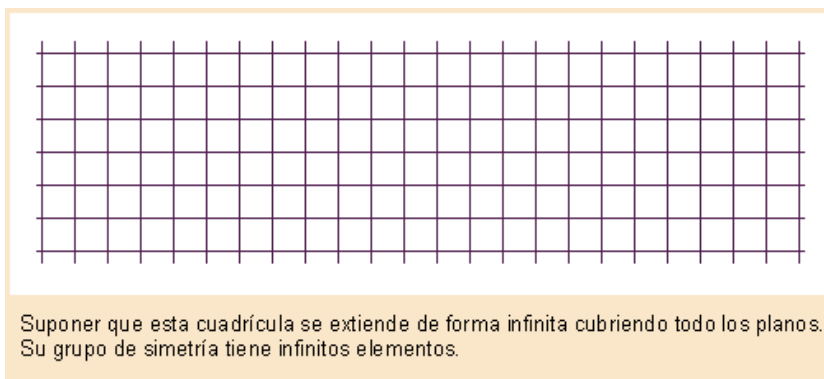


Figura con infinitas isometrías que la dejan invariante, tanto giros como simetrías axiales.

Ejemplo 4

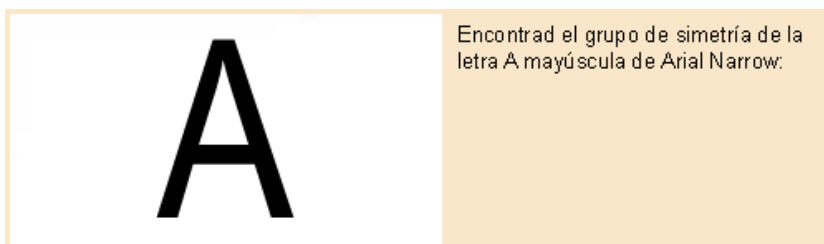
La siguiente cuadrícula infinita también tiene un grupo de simetría con infinitos elementos. En este caso, además de giros y simetrías, tendremos traslaciones. Las traslaciones que dejan esta figura fija son las traslaciones que llevan un vértice a un vértice. Cualquier giro centrado en un vértice de la cuadrícula de ángulo 90° , 180° y 270° también dejará la cuadrícula fija. Por último, debemos considerar todas las simetrías cuyos ejes sean: una recta de la misma cuadrícula, una recta que pase por los centros de los cuadrados de una misma fila o una misma columna y, finalmente, una recta diagonal a un cuadrado de la cuadrícula.



Suponer que esta cuadrícula se extiende de forma infinita cubriendo todo los planos. Su grupo de simetría tiene infinitos elementos.

Actividad

Ejercicio 1



Encontrad el grupo de simetría de la letra A mayúscula de Arial Narrow.

Solución

Identificamos las isometrías que dejan la figura invariante:

- La identidad Id
- La simetría respecto al eje vertical S_v
- Ningún giro

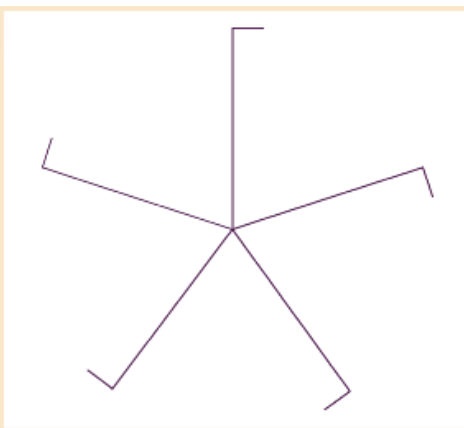
Discutimos si la composición de estas isometrías nos produce alguna que no hayamos tenido en cuenta:

	Id	Sv
Id	$\text{Id} \circ \text{Id} = \text{Id}$	$\text{Sv} \circ \text{Id} = \text{Sv}$
Sv	$\text{Id} \circ \text{Sv} = \text{Sv}$	Id

Es grupo diedral con 1 giro (la identidad) y 1 simetría.

Ejercicio 2

Encontrad el grupo de simetría de la figura del plano siguiente:



Solución

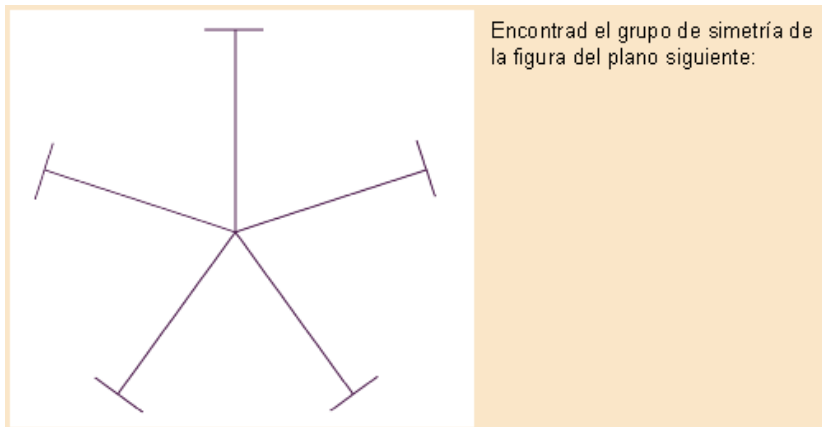
Identificamos las isometrías que dejan la figura invariante:

- La identidad Id
- Ninguna simetría
- Los giros de 72, 144, 216, 288 grados

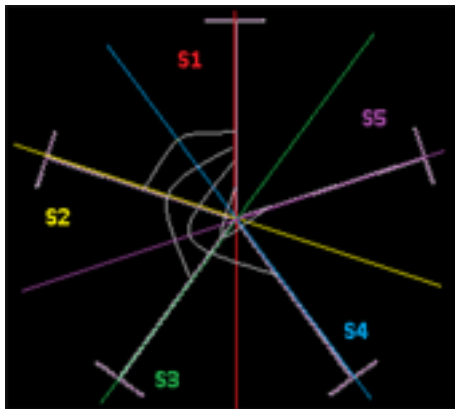
	Id	G72	G144	G216	G288
Id	$\text{Id} \circ \text{Id} = \text{Id}$	$\text{G72}^\circ \text{Id} = \text{G72}$	$\text{G144}^\circ \text{Id} = \text{G144}$	$\text{G216}^\circ \text{Id} = \text{G216}$	$\text{G288}^\circ \text{Id} = \text{G288}$
G72	$\text{Id} \circ \text{G72} = \text{G72}$	$\text{G72}^\circ \text{G72} = \text{G144}$	$\text{G144}^\circ \text{G72} = \text{G216}$	$\text{G216}^\circ \text{G72} = \text{G288}$	$\text{G288}^\circ \text{G72} = \text{Id}$
G144	$\text{Id} \circ \text{G144} = \text{G144}$	$\text{G72}^\circ \text{G144} = \text{G216}$	$\text{G144}^\circ \text{G144} = \text{G288}$	$\text{G216}^\circ \text{G144} = \text{Id}$	$\text{G288}^\circ \text{G144} = \text{G72}$
G216	$\text{Id} \circ \text{G216} = \text{G216}$	$\text{G72}^\circ \text{G216} = \text{G288}$	$\text{G144}^\circ \text{G216} = \text{Id}$	$\text{G216}^\circ \text{G216} = \text{G72}$	$\text{G288}^\circ \text{G216} = \text{G144}$
G288	$\text{Id} \circ \text{G288} = \text{G288}$	$\text{G72}^\circ \text{G288} = \text{Id}$	$\text{G144}^\circ \text{G288} = \text{G72}$	$\text{G216}^\circ \text{G288} = \text{G144}$	$\text{G288}^\circ \text{G288} = \text{G216}$

No es grupo diedral, es cíclico de orden 5.

Ejercicio 3



Solución



Identificamos las isometrías que dejan la figura invariante:

- La identidad Id
- Cinco simetrías $S1, S2, S3, S4, S5$
- Los giros de 72, 144, 216, 288 grados

Discutimos si la composición de estas isometrías nos produce alguna que no hayamos tenido en cuenta:

	Id	G72	G144	G216	G288	S1	S2	S3	S4	S5
Id	$Id \circ Id = Id$	$G72^\circ \circ Id = G72$	$G144^\circ \circ Id = G144$	$G216^\circ \circ Id = G216$	$G288^\circ \circ Id = G288$	$S1^\circ \circ Id = S1$	$S2^\circ \circ Id = S2$	$S3^\circ \circ Id = S3$	$S4^\circ \circ Id = S4$	$S5^\circ \circ Id = S5$
G72	$Id \circ G72 = G72$	$G72^\circ \circ G72 = G144$	$G144^\circ \circ G72 = G216$	$G216^\circ \circ G72 = G288$	$G288^\circ \circ G72 = Id$	$S1^\circ \circ G72 = S3$	$S2^\circ \circ G72 = S4$	$S3^\circ \circ G72 = S5$	$S4^\circ \circ G72 = S1$	$S5^\circ \circ G72 = S2$
G144	$Id \circ G144 = G144$	$G72^\circ \circ G144 = G216$	$G144^\circ \circ G144 = G288$	$G216^\circ \circ G144 = Id$	$G288^\circ \circ G144 = G72$	$S1^\circ \circ G144 = S5$	$S2^\circ \circ G144 = S1$	$S3^\circ \circ G144 = S2$	$S4^\circ \circ G144 = S3$	$S5^\circ \circ G144 = S4$
G216	$Id \circ G216 = G216$	$G72^\circ \circ G216 = G288$	$G144^\circ \circ G216 = Id$	$G216^\circ \circ G216 = G72$	$G288^\circ \circ G216 = G144$	$S1^\circ \circ G216 = S2$	$S2^\circ \circ G216 = S3$	$S3^\circ \circ G216 = S4$	$S4^\circ \circ G216 = S5$	$S5^\circ \circ G216 = S1$
G288	$Id \circ G288 = G288$	$G72^\circ \circ G288 = Id$	$G144^\circ \circ G288 = G72$	$G216^\circ \circ G288 = G144$	$G288^\circ \circ G288 = G216$	$S1^\circ \circ G288 = S4$	$S2^\circ \circ G288 = S5$	$S3^\circ \circ G288 = S1$	$S4^\circ \circ G288 = S2$	$S5^\circ \circ G288 = S3$
S1	$Id \circ S1 = S1$	$G72^\circ \circ S1 = S4$	$G144^\circ \circ S1 = S2$	$G216^\circ \circ S1 = S5$	$G288^\circ \circ S1 = S3$	$S1^\circ \circ S1 = Id$	$S2^\circ \circ S1 = G144$	$S3^\circ \circ S1 = G288$	$S4^\circ \circ S1 = G72$	$S5^\circ \circ S1 = G216$

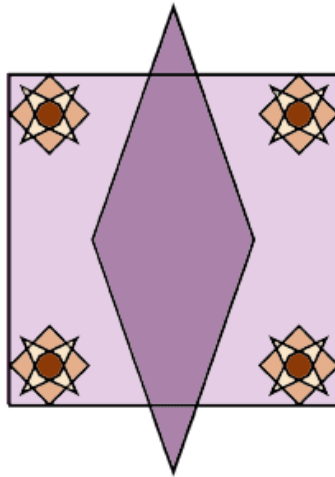
	Id	G72	G144	G216	G288	S1	S2	S3	S4	S5
S2	$\text{Id}^\circ \text{S2} = \text{S2}$	$\text{G72}^\circ \text{S2} = \text{S5}$	$\text{G144}^\circ \text{S2} = \text{S3}$	$\text{G216}^\circ \text{S2} = \text{S1}$	$\text{G288}^\circ \text{S2} = \text{S4}$	$\text{S1}^\circ \text{S2} = \text{G216}$	$\text{S2}^\circ \text{S2} = \text{Id}$	$\text{S3}^\circ \text{S2} = \text{G144}$	$\text{S4}^\circ \text{S2} = \text{G288}$	$\text{S5}^\circ \text{S2} = \text{G72}$
S3	$\text{Id}^\circ \text{S3} = \text{S3}$	$\text{G72}^\circ \text{S3} = \text{S1}$	$\text{G144}^\circ \text{S3} = \text{S4}$	$\text{G216}^\circ \text{S3} = \text{S2}$	$\text{G288}^\circ \text{S3} = \text{S5}$	$\text{S1}^\circ \text{S3} = \text{G72}$	$\text{S2}^\circ \text{S3} = \text{G216}$	$\text{S3}^\circ \text{S3} = \text{Id}$	$\text{S4}^\circ \text{S3} = \text{G144}$	$\text{S5}^\circ \text{S3} = \text{G288}$
S4	$\text{Id}^\circ \text{S4} = \text{S4}$	$\text{G72}^\circ \text{S4} = \text{S2}$	$\text{G144}^\circ \text{S4} = \text{S5}$	$\text{G216}^\circ \text{S4} = \text{S3}$	$\text{G288}^\circ \text{S4} = \text{S1}$	$\text{S1}^\circ \text{S4} = \text{G288}$	$\text{S2}^\circ \text{S4} = \text{G72}$	$\text{S3}^\circ \text{S4} = \text{G216}$	$\text{S4}^\circ \text{S4} = \text{Id}$	$\text{S5}^\circ \text{S4} = \text{G144}$
S5	$\text{Id}^\circ \text{S5} = \text{S5}$	$\text{G72}^\circ \text{S5} = \text{S3}$	$\text{G144}^\circ \text{S5} = \text{S1}$	$\text{G216}^\circ \text{S5} = \text{S4}$	$\text{G288}^\circ \text{S5} = \text{S2}$	$\text{S1}^\circ \text{S5} = \text{G144}$	$\text{S2}^\circ \text{S5} = \text{G288}$	$\text{S3}^\circ \text{S5} = \text{G72}$	$\text{S4}^\circ \text{S5} = \text{G216}$	$\text{S5}^\circ \text{S5} = \text{Id}$

Es grupo diedral con 5 giros (contando la identidad) y 5 simetrías.

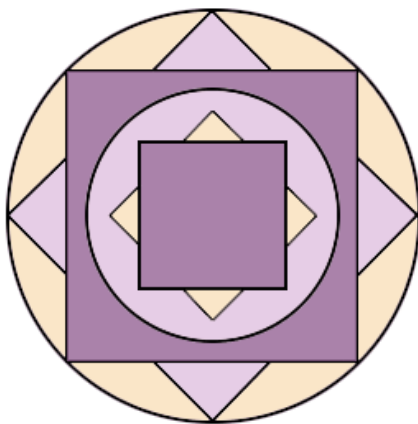
Fijaos que si no hubiéramos pensado en la simetría S2, al calcular $\text{G144}^\circ \text{S1}$ habríamos obtenido esta isometría, y la habríamos tenido que añadir a la tabla.

Ejercicio 4

Encontrad el grupo de simetría de la figura del plano siguiente:



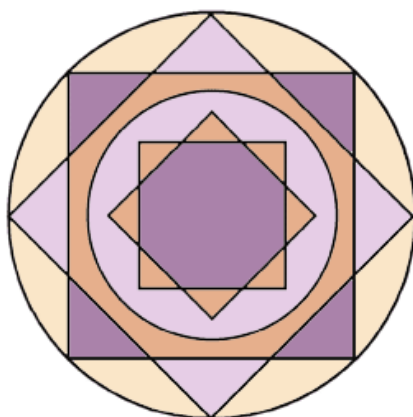
Ejercicio 5



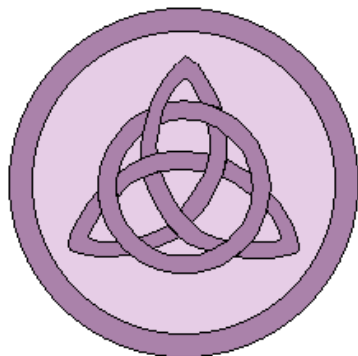
Encontrad el grupo de simetría de la figura del plano siguiente:

Ejercicio 6

Encontrad el grupo de simetría de la figura del plano siguiente:



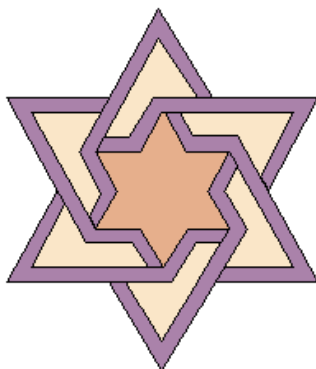
Ejercicio 7



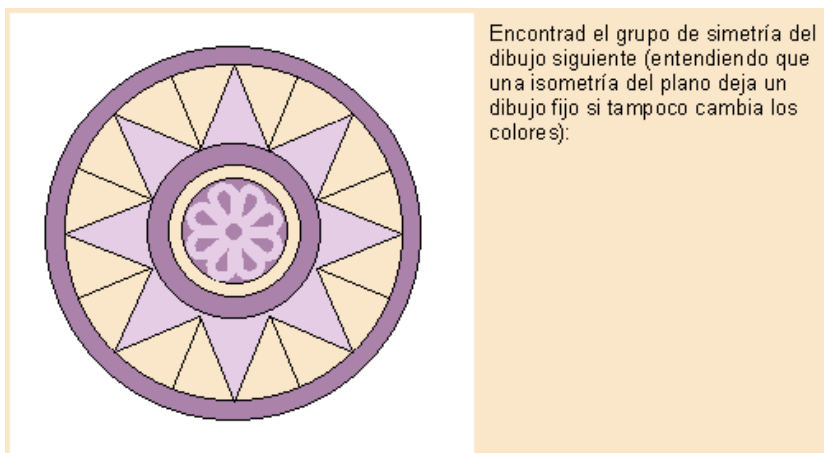
Encontrad el grupo de simetría del dibujo siguiente (entendiendo que una isometría del plano deja un dibujo fijo si tampoco cambia los colores):

Ejercicio 8

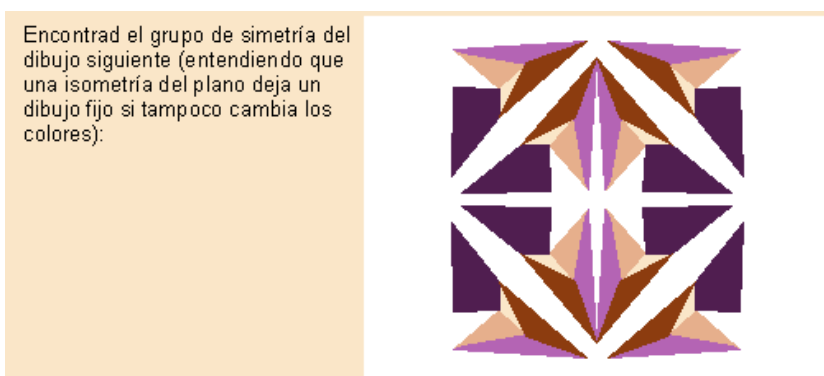
Encontrad el grupo de simetría del dibujo siguiente (entendiendo que una isometría del plano deja un dibujo fijo si tampoco cambia los colores):



Ejercicio 9



Ejercicio 10

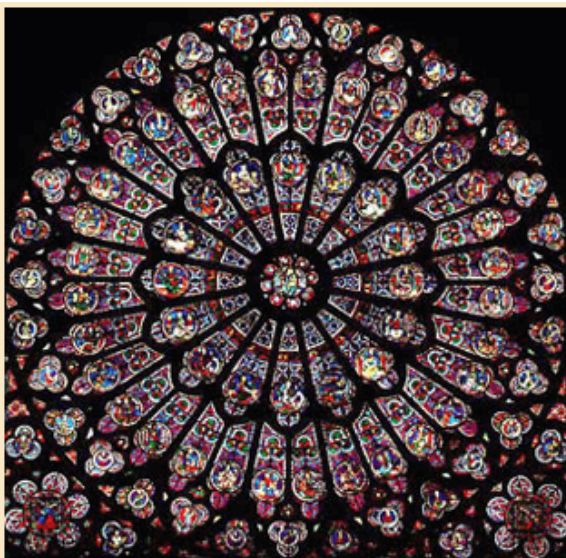


3.2. Rosetones

Cuando el grupo de simetría de una figura es finito, se suelen destacar dos grandes familias: los llamados grupos cíclicos y los grupos diedrales. En este caso, todas las figuras tendrán siempre un punto fijo. Los **grupos cíclicos** son los formados únicamente por un giro y sus composiciones. Se les denomina cíclicos porque a partir de un giro, se puede generar todo el grupo de forma cíclica a fuerza de efectuar composiciones sucesivas de este giro elemental. Los **grupos diedrales** son los que están formados por giros y simetrías. Se puede justificar que en un grupo diedral siempre coincide el número de giros con el número de simetrías. Estas dos grandes familias de grupos se denominan conjuntamente **grupos puntuales de simetría** o **grupos de simetría de Leonardo**, nombre puesto en honor a Leonardo da Vinci, quien los estudió y los utilizó en el diseño arquitectónico de plantas de capillas. Los grupos de simetría de Leonardo son los únicos que tienen en común la siguiente propiedad: todo grupo de Leonardo es un grupo finito, y todas las isometrías del grupo tienen un punto fijo común. En diseño, se puede resaltar un punto determinado haciendo que éste sea el punto fijo común de las isometrías. Entre los ejemplos y ejercicios se pueden distinguir grupos de simetría puntual.

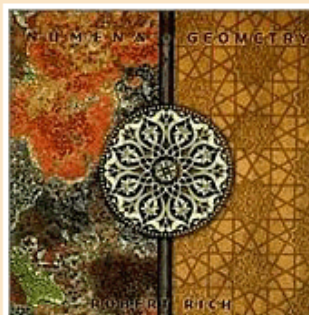
Los diseños en forma de rosetón se han utilizado muy a menudo en la historia del arte. Un **rosetón** está formado por un patrón que se repite por medio de un giro de centro fijado y de forma que las sucesivas repeticiones recubran

un círculo sin solapamientos y sin dejar espacios entre sí. Destacan por su belleza la utilización de rosetones en mosaicos griegos y romanos, así como en vidrieras de iglesias góticas.

Rosetón**Vitral gótico**

Actualmente podemos encontrar ejemplos de diseños inspirados en los diseños clásicos en forma de rosetón. Por ejemplo, en la portada del disco "Numena & Geometry" que el diseñador Ferenc Dobronyi hizo para el trabajo del músico de New Age, Robert Rich, se combina un rosetón con un mosaico de clara inspiración árabe:

Portada del disco "Numena & Geometry" diseñado por Ferenc Dobronyi



Actividad

Ejercicio

Doblando un papel varias veces, manteniendo el centro en el pliego, se pueden recortar sus bordes de forma que, al desplegarlo, obtenemos un rosetón. Experimentad con diferentes recortes y estudiad qué grupos de simetría tienen estos rosetones dependiendo del recorte que se produzca.

3.3. Frisos y cenefas

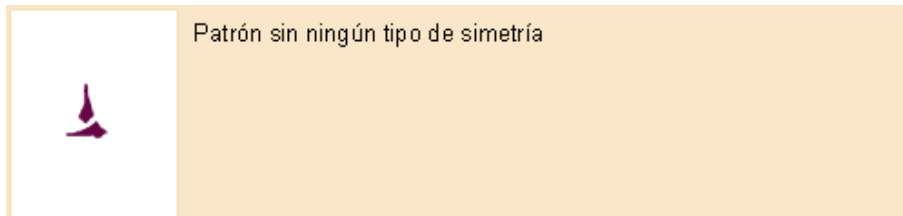
Un elemento decorativo muy utilizado en diseño gráfico y en diseño arquitectónico es el **friso** o **cenefa**. Se trata del diseño de una banda rectangular producida por repetición de un cierto motivo que usa determinadas isometrías. El uso de un determinado conjunto de isometrías conferirá un cierto ritmo y diseño a la cenefa.



Un ejemplo es este friso utilizado como separador en páginas web.

Para rellenar una banda infinita, podemos utilizar algunas isometrías del plano. Las únicas traslaciones posibles deben seguir la dirección de la banda y su longitud coincidirá con la longitud del patrón. Los ejes de las simetrías sólo podrán ser la recta que sigue la dirección y que se encuentra en posición central en la banda (eje central de la banda) y las rectas perpendiculares a ésta, que parten el patrón simétricamente. Los giros deberán ser de 180° , y sus centros se escogerán sobre el eje central. Finalmente, también podremos utilizar deslizamientos, que se obtienen a partir de una simetría respecto del eje central y una traslación paralela a la banda con longitud del vector de traslación igual a la mitad de la longitud del patrón.

Con todas estas restricciones, resulta que, a lo sumo, se pueden crear **siete frisos distintos** a partir de un patrón cualquiera, sin tener en cuenta la coloración del patrón. Hagamos una descripción de los siete posibles grupos que podemos utilizar para construir frisos a partir del patrón siguiente, que no tiene ningún tipo de simetría:



Patrón sin ningún tipo de simetría

WEB

Recurso interactivo
accesible sólo en la web.

Al estudiar el grupo de simetría de estos frisos, se observa que coinciden con el conjunto de isometrías utilizadas para construirlo.

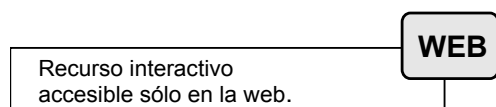
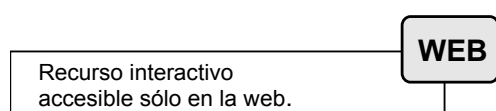
Se verifica que estos grupos son los únicos grupos de simetría que dejan la recta central de la cenefa fija y, a la vez, las únicas traslaciones que contienen son una traslación unidad fijada (en la dirección de la banda) y su repetición consecutiva.

El estudio de qué isometrías se pueden utilizar para diseñar cenefas, esto es, para rellenar una banda infinita con un motivo usando isometrías, demuestra que sólo se pueden utilizar las isometrías correspondientes a uno de los siete grupos de simetría determinados: los siete grupos de frisos.

Creemos todas las cenefas posibles a partir del siguiente patrón:

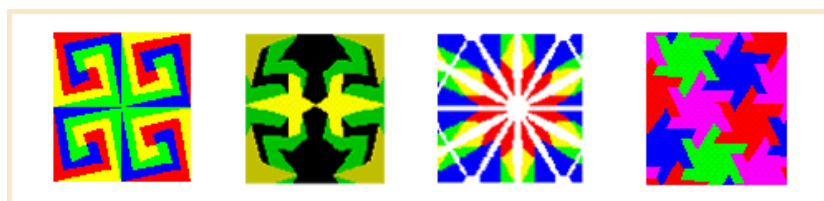


Este patrón no tiene ningún tipo de simetría, con lo que podremos crear siete cenefas distintas. Siguiendo el mismo orden con que se han presentado antes las cenefas construiremos todas las posibles:



Actividad

Construid todas las cenefas posibles con los siguientes patrones. En cada caso, comentad el número de cenefas diferentes obtenidas teniendo en cuenta la simetría del patrón.



Estos motivos han sido ampliamente utilizados en el arte desde la antigüedad. De hecho, el nombre de **grupo de los frisos** viene motivado por el uso que se hace en el diseño de los frisos arquitectónicos. El uso de cenefas en diseño

gráfico también ha sido profusamente utilizado. Estos motivos han sido utilizados para limitar el paso de un elemento artístico a otro o, simplemente, para delimitarlo.

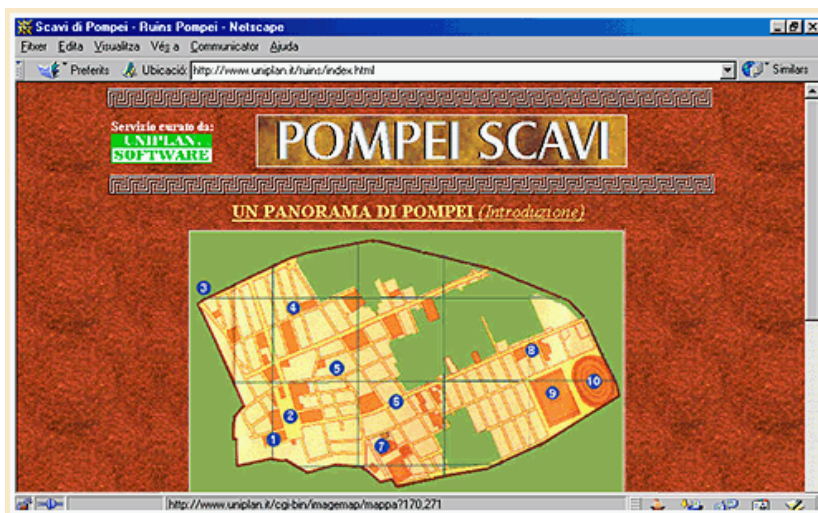


La cenefa se utiliza para limitar la portada de un libro

El uso en Internet de las cenefas está muy extendido, ya sea para remarcar títulos, encabezamientos o las mismas páginas. Por ejemplo, se ha utilizado la cenefa:



para resaltar el título de la página web siguiente:



Más ejemplos de frisos y cenefas en:

<http://library.thinkquest.org/16661/gallery/thumbnails.html>

Celtas: <http://sd.znet.com/~wchow/j32.htm>

Interactivas en JAVA:

<http://home6.inet.tele.dk/bergmann/10galleri/idx10.htm#Galleriet>

Actividad

Ejercicio 1

Doblando una banda papel en forma de acordeón, recortad sus bordes de forma que, al desplegarla, obtengamos una cenefa. Experimentad con diferentes recortes y estudiad qué tipos de cenefas se pueden obtener según el recorte que se produzca.

Ejercicio 2

Identificad el patrón y el grupo de simetría con los que se ha construido cada una de las cenefas siguientes:

Detalles de pinturas etruscas reproducidas por Giovanni Batista Piranesi (1720-1778) en un libro de 1765.



3.4. Mosaicos

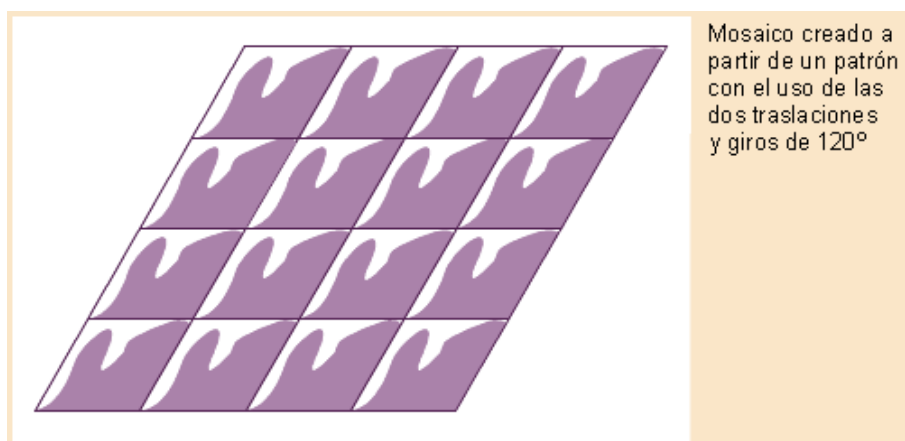
En los rosetones y en los frisos, se pretende rellenar un círculo o una banda infinita por medio de un patrón, y su imagen, por un conjunto de isometrías. Cuando queremos rellenar todo el plano a partir de un patrón elemental y un conjunto de isometrías prefijadas, obtenemos un **mosaico**. Evidentemente, para rellenar correctamente el plano, lo haremos de forma que no queden agujeros ni se produzcan solapamientos entre las copias del patrón.

Las isometrías que podremos utilizar para crear un mosaico quedan fijadas de forma análoga a las cenefas. En este caso, podremos usar traslaciones con dos direcciones principales de longitudes dependientes del patrón, junto con todas las traslaciones que se obtienen a partir de las repetidas composiciones de estas dos. En cuanto a los giros, se puede demostrar que los únicos posibles son los giros de 60° , 90° , 120° , 180° y 240° . Esta afirmación recibe el nombre de **restricción cristalográfica**, debido a su aplicación en este campo. En cuanto a simetrías, tendremos varios ejes que podremos elegir para la creación del mosaico. Finalmente, también se podrán utilizar algunos deslizamientos. Para crear cualquier mosaico, empezaremos usando simetrías, giros o deslizamientos hasta crear un primer paralelogramo, que extenderemos por todo el plano con traslaciones.

Estudiando detalladamente los grupos de simetría de todos los mosaicos que se pueden crear a partir de un patrón sin simetrías, se puede ver que **sólo hay diecisiete grupos de isometrías para construir mosaicos**, sin tener en cuenta

la coloración del patrón. Cada uno de estos diecisiete grupos recibe un nombre que fue asignado en el año 1952 por la Unión Internacional de Cristalografía, ya que, como hemos comentado, también aparecen en la cristalización de los minerales. Para crear un mosaico, se debe tomar un patrón y aplicarle las isometrías de uno de estos diecisiete grupos y se rellena un paralelogramo que, por repetición, se extenderá por todo el plano.

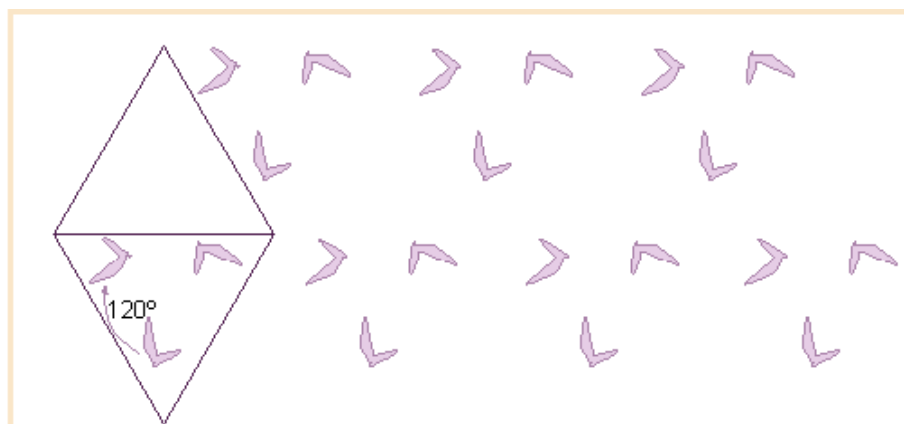
Describamos dos de estos diecisiete grupos. El más simple de todos es el que sólo utiliza las traslaciones. Para ello, basta con escoger un patrón y fijar dos direcciones de traslación. Estas dos direcciones crearán una malla en el mosaico formada por paralelogramos, que denominaremos **mallá fundamental**.



Ésta es la forma de creación de mosaicos más simple y la que usa el lenguaje HTML para crear fondos en páginas web. En el caso de fondos para páginas web, el patrón siempre será de forma rectangular, y las traslaciones que se usan serán verticales y horizontales, siguiendo los lados del patrón.

Presentemos otro de los diecisiete grupos para construir mosaicos. Si usamos alguno de los giros posibles para mosaicos, entonces podremos crear mosaicos de otro tipo. En el ejemplo siguiente se ha aplicado al patrón un giro de 120° y de 240° , y no se ha aplicado ninguna simetría ni deslizamiento. Con esto hemos creado un paralelogramo que, por traslación, recubrirá todo el plano.

Una vez construimos el mosaico, podemos comprobar que su grupo de simetría únicamente contine traslaciones y giros de 120° y 240° , pero no contiene ni simetrías ni deslizamientos.



Mosaico creado a partir de un patrón con el uso de dos traslaciones y giros de 120° .

Web complementaria

Para ver con detalle la construcción por medio de los diecisiete grupos de isometrías de mosaicos, se puede consultar la página:

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html>

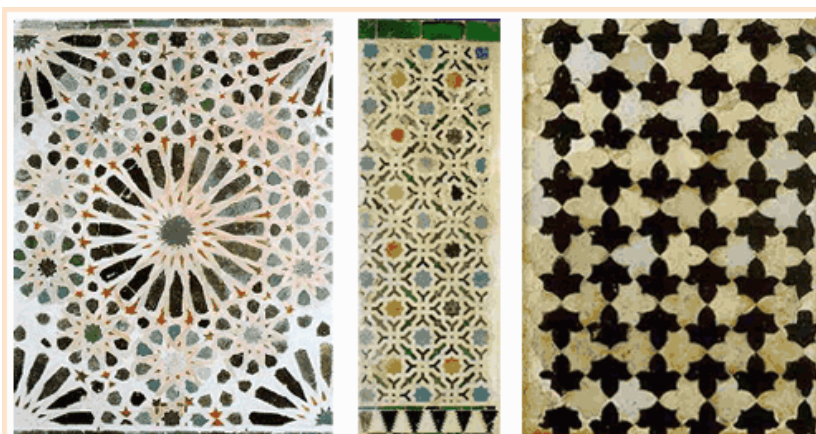
Otros de los diecisiete grupos usan giros de 60° , 90° o 180° ; introduciendo simetrías o deslizamientos obtendremos los diecisiete grupos de simetría de los mosaicos. Evidentemente, el grupo de simetría del mosaico que se obtiene coincide siempre con el grupo que se ha utilizado para construirlo.

Parece ser que los árabes conocían bien la construcción de mosaicos geométricos; prueba de ello es la aparición de los diecisiete grupos de simetría en los distintos mosaicos de la Alhambra de Granada. Los mosaicos con motivos geométricos son ampliamente utilizados en la arquitectura árabe, ya que su religión prohíbe la utilización de figuras humanas en sus mezquitas.

Si además se colorean los mosaicos, el estudio geométrico de éstos se complica en exceso y entonces ya no sólo tenemos los diecisiete grupos de simetría, sino muchos más.

Actividad

Ejercicio 1



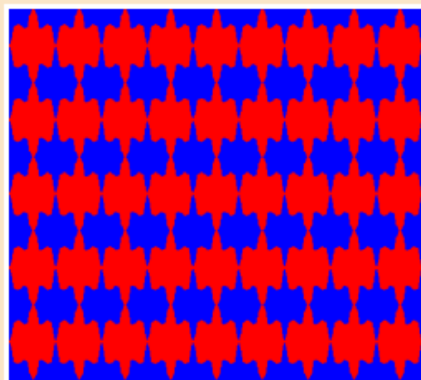
Estos tres mosaicos pertenecen a la Alhambra de Granada. Haced un estudio de cuáles han sido los grupos de simetría que se han usado para su creación.

Ejercicio 2

Sin tener en cuenta el color de este mosaico, realizad una descripción de las isometrías de su grupo de simetría.



Ejercicio 3



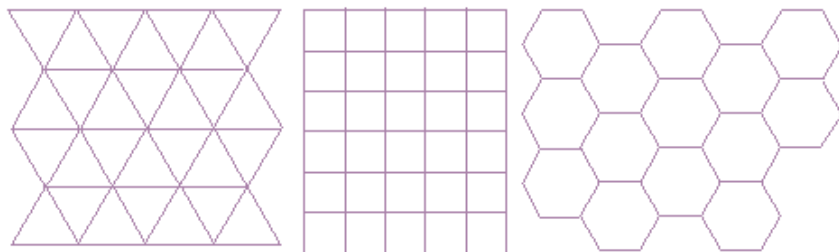
Describid el grupo de simetría del mosaico:

Ejercicio 4

Construid un patrón cualquiera y cread un mosaico usando como base giros de 120° y 240° y traslaciones.

3.5. Mosaicos regulares y semirregulares

Independientemente del patrón que queramos usar para crear un mosaico, podemos pensar qué piezas serán aptas para rellenar todo el plano. Lo más lógico es intentar hacerlo con todas las piezas iguales y regulares. Cuando un mosaico está formado por polígonos regulares, se dice que el **mosaico es regular**. Un **polígono regular** es una figura plana formada por un determinado número de lados, todos de la misma longitud y con sus ángulos interiores iguales. Así, tenemos triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares, etc.



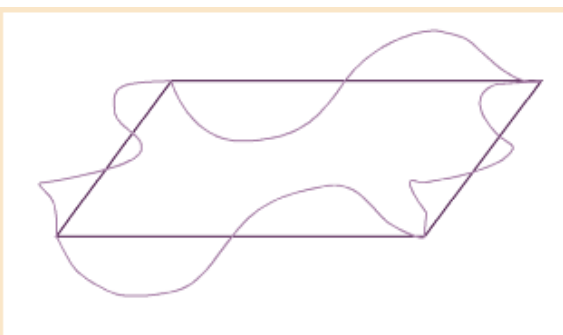
Observando los ángulos interiores de los polígonos regulares, se puede ver que los únicos aptos para la construcción de mosaicos son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos.

En caso de aceptar más de un tipo distinto de polígonos en un mismo mosaico, se pueden crear ocho tipos de mosaicos distintos: usando hexágonos y triángulos; octógonos y cuadrados; dodecágonos y triángulos; hexágonos, cuadrados y triángulos; etc. Éstos son los llamados mosaicos **semirregulares**.

3.6. Mosaicos de M.C. Escher

El artista holandés M.C. Escher, después de estudiar los diecisiete grupos de simetría de mosaicos en los diseños de los azulejos de la Alhambra de Granada, creó sus propios mosaicos, en los cuales el patrón generador era sometido a una serie de transformaciones. Por ejemplo, escogiendo un paralelogramo, Escher aplica el criterio de que toda parte recortada a un lado se traslada paralelamente al lado opuesto paralelo.

De esta forma conseguimos crear piezas que no son paralelogramos pero que encajan perfectamente entre sí y con las que también podemos recubrir todo el plano.



Otra posibilidad para crear mosaicos tipo Escher es considerar una malla de triángulos, con los que también se puede recubrir todo el plano. A cada uno de los triángulos se le aplica la siguiente modificación. Se determina el punto medio de cada uno de sus tres lados; desde este punto hasta uno de sus vértices se recorta un trozo de la pieza triangular, y mediante un giro de 180° respecto al centro de este lado, se añade la parte recortada a ese mismo lado. Así obtenemos piezas que también son aptas para rellenar todo el plano. Escher inventó varias técnicas para crear mosaicos con estos mismos trucos, pero introduciendo simetrías, giros o deslizamientos en los recortes que realizaba en cada una de las piezas básicas que usaba.

Web complementaria

Más información sobre la obra de M.C. Escher en:

<http://www.WorldOfEscher.com>
<http://www.mcescher.com>
<http://www.sfc.keio.ac.jp/~aly/escher/>

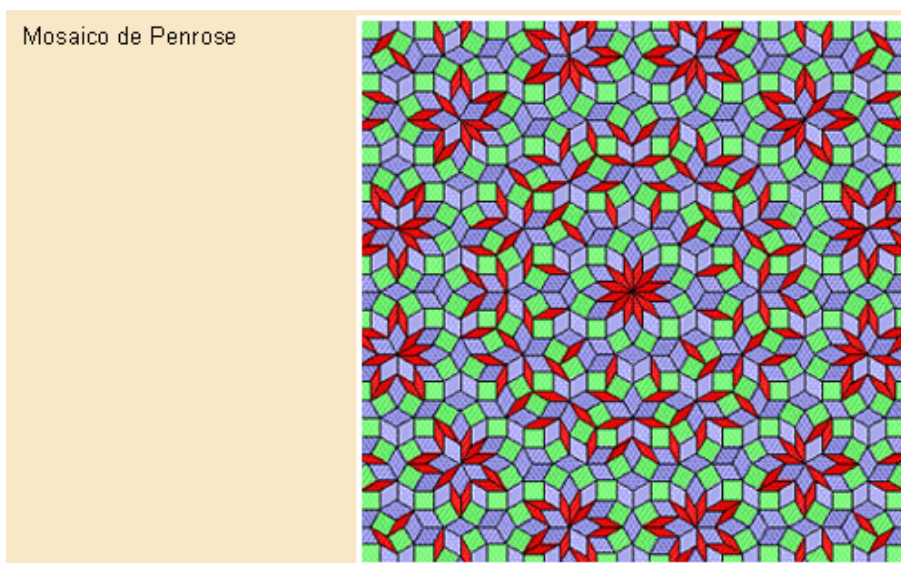


Actividad

Ejercicio

Cread un mosaico con uno de los dos procedimientos descritos para los mosaicos de Escher.

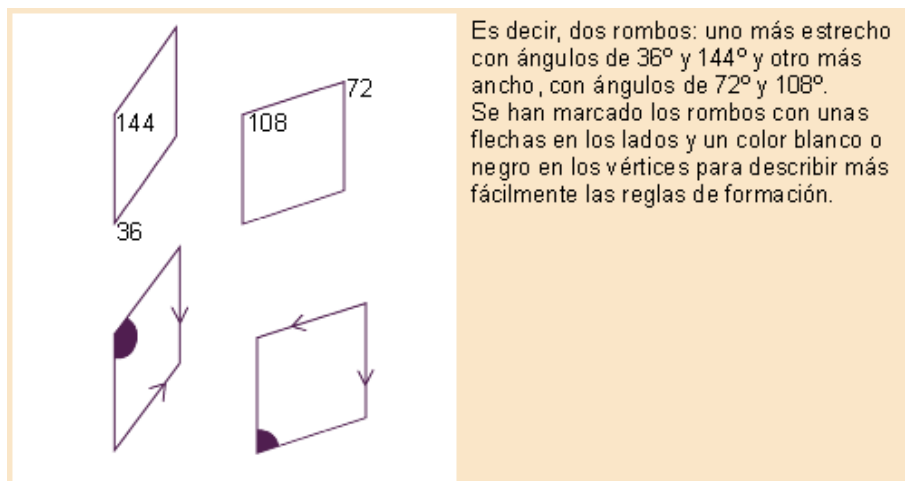
3.7. Mosaicos de Penrose



Un tipo de mosaicos que no son periódicos en el sentido de que su grupo de simetría no incluye traslaciones son los llamados **mosaicos de Penrose**. Aparte de la belleza de estos mosaicos, su compleja estructura geométrica es utilizada en el estudio cristalográfico de los cuasicristales (una nueva clase de materiales de alta tecnología descubiertos en 1984).

Los mosaicos de Penrose fueron inventados por el matemático de Oxford Roger Penrose. De la misma forma que los mosaicos se construyen utilizando un patrón y realizando copias de éste por medio de un grupo de isometrías, los mosaicos de Penrose se pueden construir siguiendo unas reglas de formación determinadas aplicadas a dos patrones.

Los dos patrones son los siguientes:



Las reglas para construir un mosaico de Penrose son las siguientes:

- 1) Dos vértices adyacentes tienen que ser del mismo color (o los dos negros o los dos blancos).
- 2) Dos lados adyacentes tienen que ser blancos los dos o deben tener dos flechas que apunten en el mismo sentido.

Actividad

Ejercicio

Imprimid los dos patrones de Penrose tantas veces como sea necesario y construid un mosaico de Penrose utilizando las reglas descritas.

Webs complementarias

Más información sobre mosaicos de Penrose:

<http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/seminar/rhombs.html>

Más información sobre todo tipo de mosaicos en la página:

<http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/index.html>

Ejercicios de autoevaluación

1. Tenemos una aplicación f de la que sabemos que $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 1$. Entonces $f(f(2))$ es...

- a) 1.
- b) 4.
- c) 3.

2. Tenemos una simetría axial del plano y dos puntos A y B distintos. Si $S_r(A) = B$, entonces $S_r(B)$ es:

- a) A .
- b) B .
- c) Depende de cuál sea el eje de simetría r .

3. La composición de dos simetrías axiales en el plano respecto de ejes que formen un ángulo de 45° es...

- a) la identidad.
- b) una simetría axial.
- c) un giro de 90° .

4. Tenemos dos giros de centro O y ángulos α y β respectivamente. Su composición, en general, es...

- a) una simetría.
- b) un giro de ángulo $\alpha \cdot \beta$.
- c) un giro de ángulo $\alpha + \beta$.

5. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

- a) El único giro que tiene rectas fijas es el giro de 180° .
- b) Las traslaciones no tienen ningún elemento fijo.
- c) Una simetría tiene una sola recta de puntos fijos.

6. La aplicación inversa de una simetría es...

- a) la misma simetría.
- b) una simetría de eje perpendicular al eje de la simetría dada.
- c) un deslizamiento.

7. ¿Cuál de las siguientes isometrías del espacio **no** tiene algún plano fijo?

- a) Simetría especular.
- b) Giro axial.
- c) Movimiento helicoidal.

8. Un cilindro queda fijo por...

- a) una traslación de vector perpendicular al eje del cilindro.
- b) un giro de eje perpendicular al del cilindro.
- c) una simetría respecto un plano que contenga al eje del cilindro.

9. Las únicas isometrías del plano que conservan la orientación son...

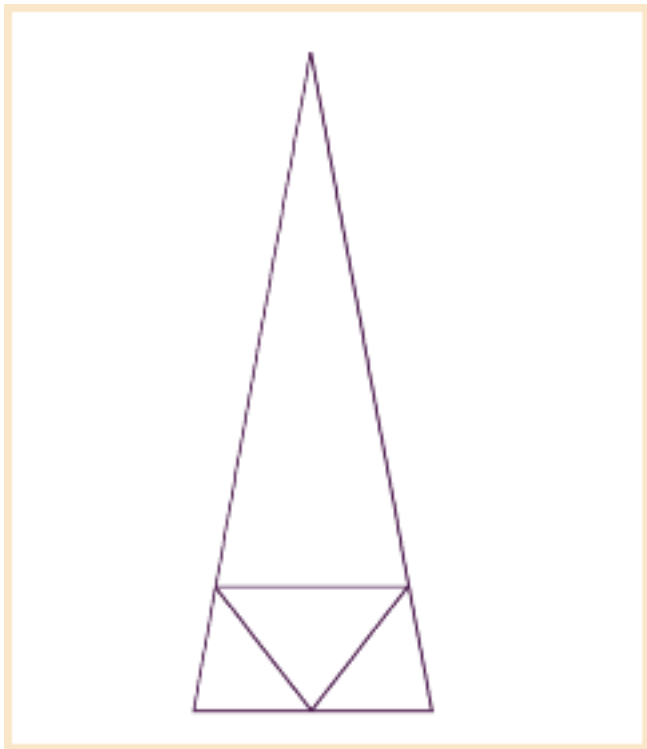
- a) los giros y las simetrías axiales.
- b) las traslaciones y los giros.
- c) los deslizamientos y las traslaciones.

10. El grupo de simetría de un cuadrado está formado por...

- a) cuatro simetrías, tres giros y la identidad.
- b) tres simetrías, tres giros y la identidad.
- c) dos simetrías, un giro y la identidad.

11. El grupo de simetría de la figura siguiente:

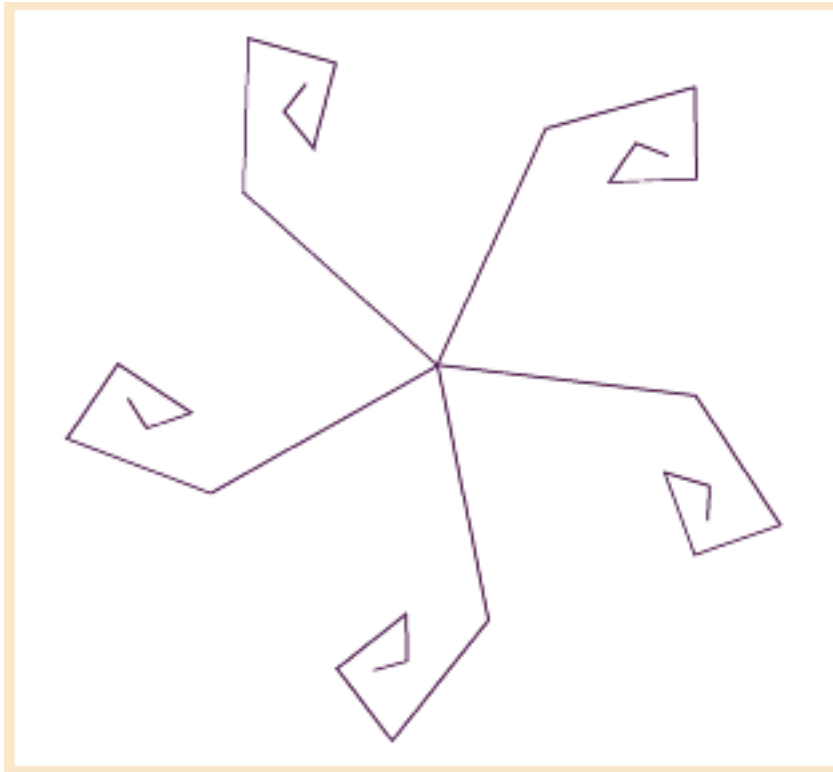
está formado por...



- a) tres simetrías, dos giros y la identidad.
- b) tres simetrías y la identidad.
- c) una simetría y la identidad.

12. El grupo de simetría de la figura siguiente:

está formado por...



- a) cinco simetrías y la identidad.
- b) cinco giros y la identidad.
- c) cuatro giros y la identidad.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. b

- a) Incorrecta. Incorrecto, ya que $f(f(2)) = f(3) = 4$ porque $f(2) = 3$ y $f(3) = 4$.
c) Incorrecta. Incorrecto, ya que $f(f(2)) = f(3) = 4$ porque $f(2) = 3$ y $f(3) = 4$.

2. a

- b) Incorrecta. Hay que tener en cuenta que si se hace el simétrico de un punto A y se obtiene el punto B, entonces el simétrico del B es el A.
c) Incorrecta. No depende de cuál sea el eje de simetría. Haced un dibujo con una recta cualquiera y un punto A cualquiera.

3. c

- a) Incorrecta. Esto sólo ocurre cuando se compone una simetría consigo misma.
b) Incorrecta. La composición de dos simetrías no da nunca otra simetría.

4. c

- a) Incorrecta. La composición de dos giros no da una simetría.
b) Incorrecta. Al componer giros del mismo centro, se suman los ángulos.

5. b Esta afirmación es la falsa.

- a) Incorrecta. Esta afirmación es verdadera.
c) Incorrecta. Esta afirmación es verdadera.

6. a

- b) Incorrecta. Haced un dibujo de la composición de dos simetrías de ejes perpendiculares y comprobad que el resultado no es la identidad.
c) Incorrecta. Repasad la definición de deslizamiento para convenceros de que no es cierta. Tened en cuenta que estamos hablando de un deslizamiento con vector no nulo.

7. c

- a) Incorrecta. El plano de simetría es de puntos fijos, y los planos perpendiculares al plano de simetría son planos fijos.
b) Incorrecta. Los planos perpendiculares al eje de giro son planos fijos.

8. c

- a) Incorrecta. Esto sería correcto si el vector de traslación fuera nulo, pero entonces esta isometría es la identidad.
b) Incorrecta. Esto sería correcto sólo si el giro fuera de ángulo 0° , 180° o sus múltiplos, pero no para un giro en general.

9. b

- a) Incorrecta. Las simetrías axiales no conservan la orientación.

10. a

- c) Incorrecta. Estas isometrías corresponderían a un rectángulo, pero no a un cuadrado.

11. c

- a) Incorrecta. El único giro que puede dejar fija esta figura sería de 0° , es decir, la identidad.
b) Incorrecta. Si una figura admite tres simetrías axiales en su grupo de simetría, automáticamente debe tener sus composiciones y, por tanto, tres giros (contando la identidad como un giro de ángulo 0°).

12. c

- a) Incorrecta. Esta figura no tiene ninguna simetría axial en su grupo de simetría.
b) Incorrecta. El ángulo mínimo de giro es de $360^\circ/5 = 72^\circ$. Sus múltiplos también darán giros que dejan esta figura fija. Contad cuántos hay.